УДК 519.632.4

ВИКОРИСТАННЯ БАРИЦЕНТРИЧНИХ КООРДИНАТ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ СЕРЕНДИПОВОЇ ПОВЕРХНІ

Астіоненко І.О., к.ф.-м.н.,
Гучек П.Й., к.т.н.,
Литвиненко О.І., к.т.н.,
Тулученко Г.Я., д.т.н.
Херсонський національний технічний університет
Тел. (0552) 32-69-95

***Анотація* – у роботі ймовірнісно-геометричний метод моделювання базисів трикутних скінченних елементів з використанням барицентричних координат поширено на моделювання базисів серендипових скінченних елементів.**

***Ключові слова* – скінченний елемент, базисна функція, геометрична ймовірність, барицентрична координата.**

Постановка проблеми. Традиційний метод побудови інтерполяційного полінома для скінченного елемента (СЕ) потребує складання і розв'язання СЛАР відносно параметрів, що визначають поліном [1]. Чим вище степінь полінома, тим більш складною стає реалізація методу визначення базисних функцій. Є випадки (наприклад, для СЕ у формі шестикутника), коли матричними методами неможливо побудувати базис СЕ через сингулярність матриці системи. Тому для побудови інтерполяційних поліномів зручно використовувати інші методи. Альтернативою матричному методу є метод, який заснований на ймовірнісно-геометричних уявленнях. В монографіях з методу скінченних елементів (МСЕ) широко використовуються барицентричні координати для побудови базисів на трикутних і тетраедральних елементах [1-2]. На жаль, засновники МСЕ не використовували цей підхід для скінченних елементів у формі квадрата і куба.

Аналіз основних досліджень. Як відомо, природним узагальненням і розширенням поняття класичної ймовірності на нескінчену множину точок є геометрична ймовірність, що обчислюється як відношення мір (довжин, площ, об'ємів) в одно-, дво- і тривимірних випадках. Вперше для побудови базису скінченного елемента геометричну ймовірність використав А.Н. Хомченко у 1982 році [3]. Пізніше за допомогою ймовірнісно-геометричного методу були отримані базиси на трикутних [3,4,6] і чотирикутних скінченних елементах [5,6]. Основна ідея побудови базисної функції для певного вузла формулюється у вигляді задачі знаходження ймовірності влучання навмання вкинутої в скінченний елемент довільної точки в підобласть, що є протилежною цьому вузлу. На даний час авторами розроблено декілька підходів до ймовірнісно-геометричного моделювання базисів чотирикутних СЕ [5,6]. Один із цих підходів заснований на розбитті чотирикутного СЕ спеціальними способами на трикутники та застосуванні в останніх барицентричних координат.

Формулювання цілей статті. Застосувати ймовірнісно-геометричний метод моделювання базисів трикутних скінченних елементів з використанням барицентричних координат до моделювання базисів серендипових скінченних елементів.

Основна частина. У 1827 році німецьким геометром і астрономом Августом Фердінандом Мьобіусом була запропонована нова барицентрична система координат. Ця система координат у двовимірному випадку вважається заданою, якщо заданий базисний трикутник. Барицентричні координати (ξ_1, ξ_2, ξ_3) будь-якої точки M площини визначаються як частки одиничної маси, які слід помістити у відповідні вершини базисного трикутника, щоб точка M стала центром мас трикутника. Барицентричну координату симплексу можна обчислювати як відношення площ трикутників (рис. 1,а), так і як відношення висот відповідних трикутників (рис. 1,б).

Базисна функція для вузла 1 трикутного скінченного елемента теж може бути обчислена за допомогою формули геометричної ймовірності як відношення площ (або висот) відповідних трикутників (рис. 1).

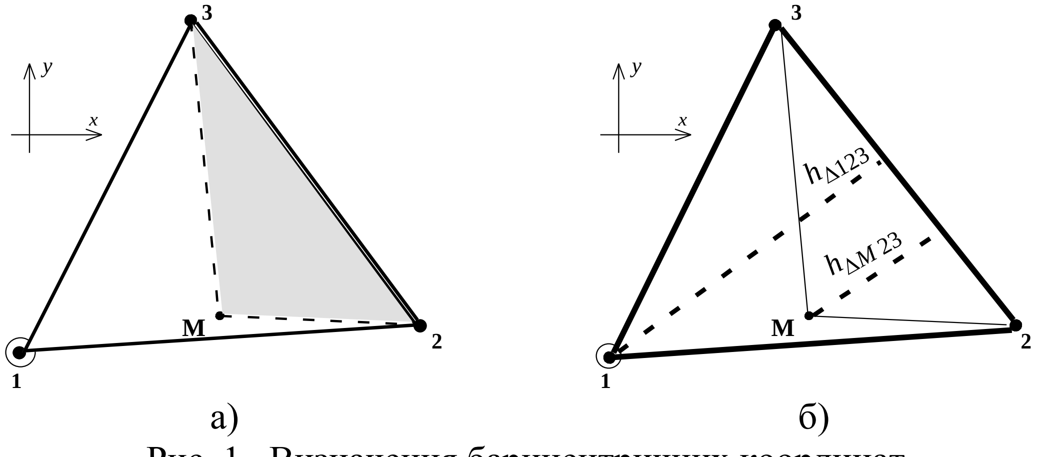


Рис. 1. Визначення барицентричних координат у скінченному елементі лінійної інтерполяції.

Наприклад, перша координата задається формулою:

$$\xi_1(x, y) = \frac{S_{\Delta M23}}{S_{\Delta 123}} = N_1 \quad \text{або} \quad \xi_1(x, y) = \frac{h_{\Delta M23}}{h_{\Delta 123}} = N_1, \tag{1}$$

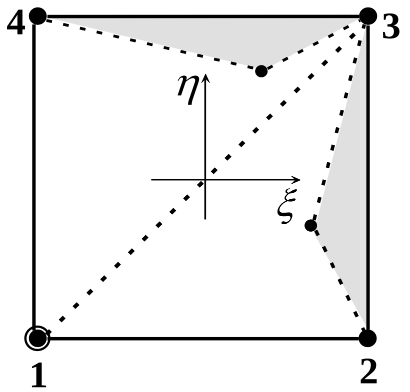
де $S_{\Delta 123}$ – площа трикутника 1-2-3; $S_{\Delta M23}$ – площа трикутника М-2-3;

$M(x,y)$ − поточна точка, $h_{\Delta M23}$− висота трикутника М-2-3, $h_{\Delta 123}$− висота трикутника 1-2-3.

Таким чином, з формули (1) стає зрозумілим, що барицентрична координата симплексу і базисна функція трикутного СЕ з трьома вузлами − це поняття тотожні. Зауважимо, що поверхня базисної функції трикутного СЕ з трьома вузлами на границі − це площина, що має аплікату рівну одиниці у відповідному вузлі і нуль в інших вузлах. Сума базисних функцій на СЕ дорівнює одиниці для довільної точки трикутника. Поведінка поверхонь базисних функцій симплексу яскраво характеризує властивості барицентричних координат.

Покажемо, як барицентричні координати симплексу можна використовувати на серендипових СЕ. Серендиповий елемент − це чотирикутник з вузлами інтерполяції тільки на границі елемента і базисом, який відповідає цим вузлам. Елементи серендипової сім'ї дозволяють за рахунок відсутності внутрішніх вузлів значно скоротити обсяг обчислень у порівнянні з елементами лагранжевого типу, усунути нефізичні осциляції поля. Серендипові елементи були відкриті в 60-ті роки минулого сторіччя, і з того часу інтерес до них невпинно зростає, що супроводжується поширенням їх практичного застосування.

Білінійний серендипів скінченний елемент має чотири вузли у вершинах квадрата (ССЕ-4) (рис. 2). Представимо ССЕ-4 як композицію двох трикутників з вершиною в спільному вузлі 1: перший трикутник − Δ_{1-2-3}, другий трикутник −Δ_{1-3-4} (рис. 2).



$|\xi| \le 1,$
$|\eta| \le 1.$

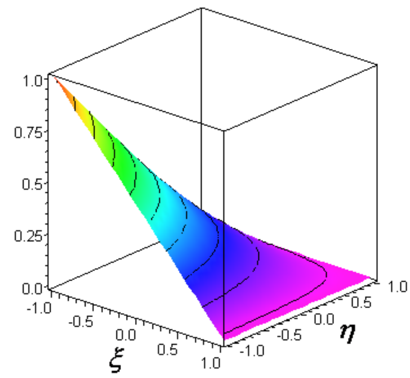


Рис. 2. До побудови функції N_1.

Рис.3. Візуалізація N_1.

На кожному з трикутників будуємо базис лінійної інтерполяції за формулою (1) і, скориставшись теоремою добутку ймовірностей незалежних подій, отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta). \qquad (2)$$

Взагалі,

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \quad i = 1,2,3,4, \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \qquad (3)$$

Візуалізація серендипової поверхні N_1 (рис. 3) демонструє, що функції (3) задовольняють основним властивостям базисних функцій.

Відкриває сім’ю серендипових СЕ вищих порядків *біквадратичний елемент*, який має 8 вузлів (ССЕ-8). На цьому елементі теж можна скористатися ймовірнісно-геометричним методом. Для побудови базисної функції N_1 розбиваємо ССЕ-8 на три трикутника: Δ_{1-3-5}, Δ_{1-5-7} і Δ_{1-2-8} (рис. 4). На кожному з трикутників будуємо базис лінійної інтерполяції за формулою (1):

$$N_1^{(1)} = \frac{1-\xi}{2}; \quad N_1^{(2)} = \frac{1-\eta}{2}; \quad N_1^{(3)} = -1-\xi-\eta. \tag{4}$$

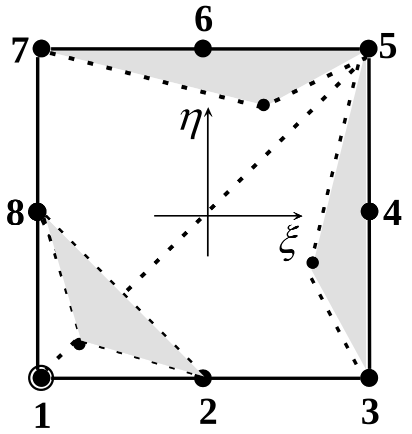


Рис. 4. До побудови N_1 базису ССЕ-8.

$|\xi| \le 1,$
$|\eta| \le 1.$

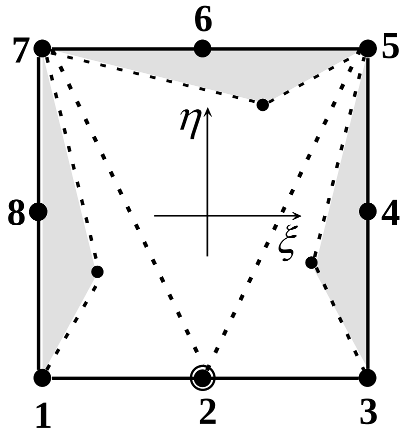


Рис. 5. До побудови N_2 базису ССЕ-8.

Добуток цих ймовірностей дає базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} \cdot N_1^{(3)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta). \tag{5}$$

Для побудови базисної функції для вузла 2 розбиваємо біквадратичний елемент на три трикутника: 1) Δ_{2-3-5}, 2) Δ_{2-7-1} та 3) Δ_{2-5-7} і на кожному з них шукаємо відповідну барицентричну координату $N_2^{(1)}, N_2^{(2)}, N_2^{(3)}$ (рис. 5):

$$N_2^{(1)} = 1-\xi; \quad N_2^{(2)} = 1+\xi; \quad N_2^{(3)} = \frac{1-\eta}{2}. \tag{6}$$

За теоремою добутку ймовірностей отримуємо:

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta). \tag{7}$$

Інші базисні функції базису біквадратичної інтерполяції отримаємо з формул (5) і (7) перестановкою координат ξ і η.

Бікубічний скінченний елемент має 12 вузлів інтерполяції. Вперше поліноміальний базис для цього СЕ був отриманий підбором у 1968 р. Ергатудисом, Айронсом та Зенкевичем [1]. Авторами отримані альтернативні базиси на цьому елементі [4]. Покажемо, як можна використати барицентричні координати для побудови альтернативного базису ССЕ-12 СЕ.

Для побудови базисної функції N_1 розбиваємо СЕ на чотири трикутника: Δ_{1-4-7}, Δ_{1-7-10}, Δ_{1-3-11} и Δ_{1-2-12} зі спільною вершиною 1 (рис. 6). На кожному з трикутників будуємо базис лінійної інтерполяції за формулою (1):

$$
\begin{aligned}
&N_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\xi); \qquad && N_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1-\eta);\\
&N_1^{(3)} = \frac{1}{4}(-2-3\xi-3\eta), \qquad && N_1^{(4)} = \frac{1}{4}(-4-3\xi-3\eta).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

За формулою добутку ймовірностей отримуємо:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} \cdot N_1^{(3)} \cdot N_1^{(4)} =\\
&= \frac{1}{32}(1-\xi)\,(1-\eta)(2+3\xi+3\eta)(4+3\xi+3\eta).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

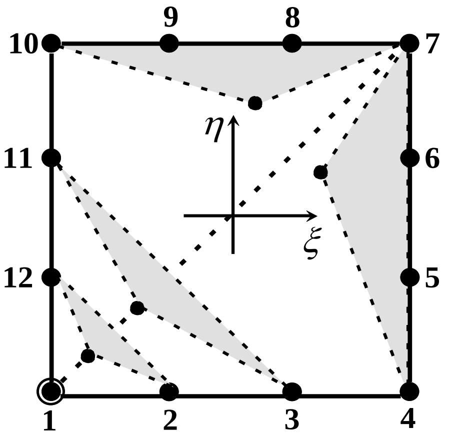


Рис. 6. До побудови N_1 базису ССЕ-12.

$|\xi| \le 1,$

$|\eta| \le 1.$

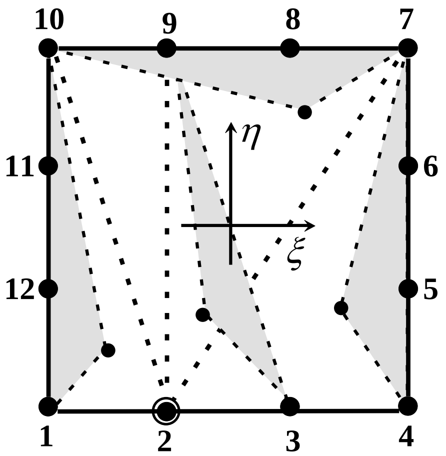


Рис. 7. До побудови N_2 базису ССЕ-12.

Для побудови N_2 розглянемо трикутники: Δ_{2-4-7}, Δ_{2-10-1}, Δ_{2-3-9} и Δ_{2-7-10} (рис.7). Отримуємо відповідні ймовірності:

$$
\begin{aligned}
&N_2^{(1)} = \frac{3}{4}(1-\xi), \qquad && N_2^{(2)} = \frac{3}{2}(1+\xi),\\
&N_2^{(3)} = \frac{1}{2}(-3\xi-\eta), \qquad && N_2^{(4)} = \frac{1}{2}(1-\eta).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

За правилом добутку ймовірностей отримуємо:

$$
N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} \cdot N_2^{(4)} = \frac{9}{32}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(-3\xi-\eta). \tag{11}
$$

Висновки. Вперше показано можливість застосування ймовірнісно-геометричного методу (з використанням барицентричних координат) до побудови рівняння інтерполяційної серендипової поверхні. Перспективи подальших досліджень логічно пов’язати із узагальненням досліджуваного методу на просторові скінченні елементи.

Література

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. *Норри Д.* Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
3. *Хомченко А.Н.* О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А.Н.Хомченко. – Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. — 5 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.10.82, №5264.
4. *Хомченко А.Н.* Ймовірнісна інтерпретація рекурентної процедури побудови базисних функцій трикутних скінченних елементів / А.Н. Хомченко, Г.Я. Тулученко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип. 16. – С. 22–29.
5. *Хомченко А.Н.* П’ять способів побудови функції-"пагоди" / А.Н.Хомченко, І.О. Астіоненко, Н.О. Козуб // Праці Тавр. держ. агротехн. ун-ту. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 4. – Т. 37. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С. 24 – 31.
6. *Астионенко И.А.* Вероятностная природа кусочно-планарной аппроксимации / И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Науч. ведом. Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика. – Б.: БелГУ, 2013. – № 33 (176). – Вып. 34.– С. 142–150.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СЕРЕНДИПОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И.А. Астионенко, П.И. Гучек, Е.И. Литвиненко, Г.Я. Тулученко

***Аннотация* – в работе вероятностно-геометрический метод моделирования базисов треугольных конечных элементов с использованием барицентрических координат распространен на моделирование базисов серендиповых конечных элементов.**

USING BARYCENTRIC COORDINATES FOR SERENDIPITY SURFACE MODELING

I. Astionenko, P. Huchek, E. Litvinenko, G. Tuluchenko

Summary

The probability-geometrical method of the triangular finite elements bases modeling with barycentric coordinates distributed at the bases serendipity finite elements modeling in the article.