УДК 514.18

ОСНОВНА ТЕОРЕМА УЗАГАЛЬНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Конопацький Є.В., к.т.н.*
Донбаська національна академія будівництва та архітектури
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Тел. (0623) 22-24-67

Анотація **– в роботі сформульована і доведена основна теорема узагальнених тригонометричних функцій. Також досліджено наслідки запропонованої теореми.**

Ключові слова **– узагальнені тригонометричні функції, основна теорема, площина, БН-числення, наслідки теореми.**

Постановка проблеми. Під час досліджень використання узагальнених тригонометричних функцій для визначення площини за допомогою кутової та радіальної параметризації [1] у БН-численні було знайдено теорему, яка дозволяє значно спростити ув’язку кутових і радіальних параметрів в симплексі площини для переходу від однієї параметризації до іншої.

Аналіз останніх досліджень. Термін узагальнені тригонометричні функції було введено у роботі [2]. Властивості узагальнених тригонометричних функцій було досліджено у роботі [3]. У роботах [4, 5] автором було запропоновано використання узагальнених тригонометричних функцій для визначення плоских кривих, а також їх використання для переходу від однієї параметризації до іншої. Також автором у роботі [6] було досліджено особливості параметризації площини у БН-численні.

Формулювання цілей статті. Сформулювати і довести основну теорему узагальнених тригонометричних функцій.

Основна частина. Сформулюємо основну теорему узагальнених тригонометричних функцій.

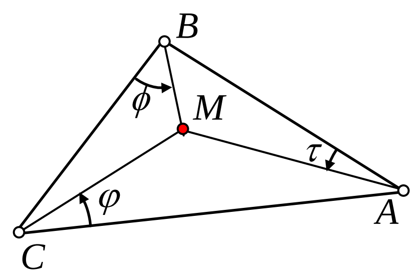

Рис. 1. Визначення точки M у трикутнику ABC.

Теорема. Якщо у довільному трикутнику визначити точку M за допомогою трьох кутів φ, τ і ϕ (рис. 1), то справедливим є наступне співвідношення:

---
* Науковий консультант: д.т.н., професор Верещага В.М.

$$\sin_{\tau}\left(\alpha-\tau\right)\cdot\sin_{\phi}\left(\beta-\phi\right)\cdot\sin_{\varphi}\left(\gamma-\varphi\right)=1. \qquad (1)$$

де $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$ і $\angle BCA=\gamma$.

Доказ. Визначимо за допомогою узагальнених синусів довжину відрізків прямих AM, BM і CM:

$$\begin{aligned} |AM| &= b\sin_{(\varphi+\alpha-\tau)}\varphi = c\sin_{(\beta-\phi+\tau)}(\beta-\phi),\\ |BM| &= c\sin_{(\tau+\beta-\phi)}\tau = a\sin_{(\gamma-\varphi+\phi)}(\gamma-\varphi),\\ |CM| &= b\sin_{(\alpha-\tau+\varphi)}(\alpha-\tau) = a\sin_{(\phi+\gamma-\varphi)}\phi. \end{aligned} \qquad (2)$$

Для більшої наочності перейдемо до стандартних тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned} &b\sin(\beta-\phi+\tau)\sin\varphi = c\sin(\varphi+\alpha-\tau)\sin(\beta-\phi),\\ &c\sin(\gamma-\varphi+\phi)\sin\tau = a\sin(\tau+\beta-\phi)\sin(\gamma-\varphi),\\ &a\sin(\alpha-\tau+\varphi)\sin\phi = b\sin(\phi+\gamma-\varphi)\sin(\alpha-\tau). \end{aligned} \qquad (3)$$

Перемножимо між собою відповідно ліву і праву чистини рівнянь (3) і після спрощень отримаємо:

$$\frac{\sin(\alpha-\tau)}{\sin\tau}\cdot\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\phi}\cdot\frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}=1. \qquad (4)$$

Переходячи до узагальнених синусів отримаємо вираз (1). Теорему доведено.

Також можна довести запропоновану теорему за допомогою теореми Чеви. Для цього визначимо співвідношення $u=BCM_A$, $v=CAM_B$ і $w=ABM_C$ на сторонах трикутника ABC (рис. 2) за допомогою узагальнених синусів.

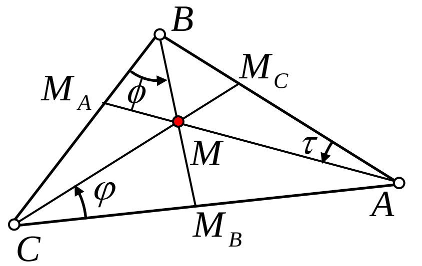

Рис. 2. Доказ за допомогою теореми Чеви.

$$\begin{aligned} u &= BCM_A = \sin_{\beta}\gamma\cdot\sin_{(\alpha-\tau)}\tau,\\ v &= CAM_B = \sin_{\gamma}\alpha\cdot\sin_{(\beta-\phi)}\phi,\\ w &= ABM_C = \sin_{\alpha}\beta\cdot\sin_{(\gamma-\varphi)}\varphi. \end{aligned} \qquad (5)$$

Відповідно до теореми Чеви $u\cdot v\cdot w=1$. Тоді маємо:

$$\sin_{\beta}\gamma\cdot\sin_{(\alpha-\tau)}\tau\cdot\sin_{\gamma}\alpha\cdot\sin_{(\beta-\phi)}\phi\cdot\sin_{\alpha}\beta\cdot\sin_{(\gamma-\varphi)}\varphi=1. \qquad (6)$$

Врахуємо одну з властивостей узагальнених синусів, яку було доведено у [3]:

$$\sin_{\beta}\gamma\cdot\sin_{\gamma}\alpha\cdot\sin_{\alpha}\beta=1. \qquad (7)$$

Підставляючи співвідношення (7) у співвідношення (6) після певних перетворень отримаємо співвідношення (1). Теорему доведено.

Використовуючи теорему Чеви можна визначити площину ABC за допомогою узагальнених синусів. Як відомо з [7], точка площина ABC визначається наступним точковим рівнянням:

$$M=(A-C)\frac{1}{1+u+uv}+(B-C)\frac{u}{1+v+uv}+C, \qquad (8)$$

Підставимо значення параметрів u і v зі співвідношення (5) і після певних перетворень отримаємо рівняння точки M у площині ABC:

$$M=(A-C)\frac{1}{1+\sin_{\beta}\gamma\cdot\sin_{(\alpha-\tau)}\tau\left[1+\sin_{\gamma}\alpha\cdot\sin_{(\beta-\phi)}\phi\right]}+$$
$$+(B-C)\frac{\sin_{\beta}\gamma\cdot\sin_{(\alpha-\tau)}\tau}{1+\sin_{\gamma}\alpha\cdot\sin_{(\beta-\phi)}\phi\left[1+\sin_{\beta}\gamma\cdot\sin_{(\alpha-\tau)}\tau\right]}+C. \qquad (9)$$

Далі розглянемо деякі наслідки запропонованої теореми.

Наслідок 1. Справедливим є співвідношення зворотне до (1):

$$\sin_{(\alpha-\tau)}\tau\cdot\sin_{(\beta-\phi)}\phi\cdot\sin_{(\gamma-\varphi)}\varphi=1. \qquad (10)$$

Наслідок 2. Враховуючи властивості узагальнених тригонометричних функцій [3], вираз (1) можна представити за допомогою узагальнених косинусів:

$$\cos_{\tau}\alpha\cdot\cos_{\phi}\beta\cdot\cos_{\varphi}\gamma=1. \qquad (11)$$

Наслідок 3. Якщо через будь яку точку M, що належить площині трикутника ABC (рис. 3), провести прямі паралельні сторонам цього трикутника, які утворюють на сторонах трикутника точки P_A, Q_A, P_B, Q_B, P_C і Q_C, то справедливим є наступне співвідношення:

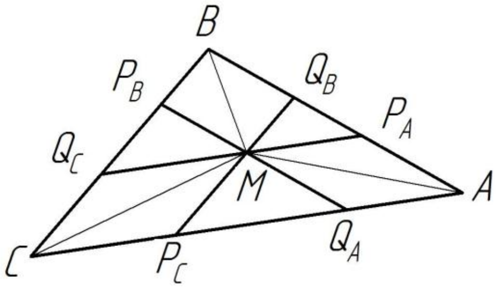

Рис. 3. Визначення точки M паралельними прямими.

$$P_AQ_AA\cdot P_BQ_BB\cdot P_CQ_CC=1, \qquad (12)$$

де $P_AQ_AA=\frac{P_AA}{AQ_A}$, $P_BQ_BB=\frac{P_BB}{BQ_B}$, $P_CQ_CC=\frac{P_CC}{CQ_C}$ – прості відношення трьох точок прямої зі зламом [2] відповідно у точках A, B і C.

Як видно з рис. 1, прямі паралельні сторонам трикутника ABC утворюють три паралелограми: P_AQ_AAM, P_BQ_BBM і P_CQ_CCM, а також три трикутника P_CQ_AM, P_AQ_BM і P_BQ_CM, які подібні між собою і подібні до вихідного трикутника ABC. Враховуючи це, співвідношення (10) можна представити у наступному вигляді:

$$AMP_A\cdot BMP_B\cdot CMP_C=1. \qquad (13)$$

Співвідношення (12) і (13) є еквівалентними до співвідношень (1) і (11), тільки представленим без використання узагальнених тригонометричних функцій.

Наслідок 4. Використовуючи співвідношення (1) можна відійти від надлишкової параметризації і виключити будь який з кутів φ, τ і ϕ, які визначають точку M в площині ABC. Наприклад, визначимо кут ϕ за допомогою кутів φ і τ. Враховуючи співвідношення (1), отримаємо:

$$\frac{\left(\sin_{(\gamma-\varphi)}\varphi\cdot\sin_{(\alpha-\tau)}\tau+\cos\beta\right)^2}{\sin^2\beta}=\frac{1-\sin^2\phi}{\sin^2\phi},$$
$$\sin\phi=\pm\frac{\sin\beta}{\sqrt{1+2\cos\beta\cdot\sin_{(\gamma-\varphi)}\varphi\cdot\sin_{(\alpha-\tau)}\tau+\sin^2_{(\gamma-\varphi)}\varphi\cdot\sin^2_{(\alpha-\tau)}\tau}}. \tag{14}$$

Аналогічним чином можна визначити кути φ і τ.

Наслідок 5. Для прямокутного трикутника ABC з кутом $\gamma=\frac{\pi}{2}$ справедливим є наступне співвідношення:

$$\frac{\sin(\alpha-\tau)}{\sin\tau}\cdot\frac{\cos(\alpha+\phi)}{\sin\phi}\cdot tg\varphi=1. \tag{15}$$

Аналогічним чином можна отримати співвідношення, для випадків, коли інші кути трикутника дорівнюють $\frac{\pi}{2}$.

Наслідок 6. Для правильного трикутника ABC вираз (1) приймає наступний вигляд:

$$\frac{\sqrt{3}\cos\tau-\sin\tau}{2\sin\tau}\cdot\frac{\sqrt{3}\cos\phi-\sin\phi}{2\sin\phi}\cdot\frac{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}{2\sin\varphi}=1. \tag{16}$$

Висновки. У статті сформульована і доведена основна теорема узагальнених тригонометричних функцій, а також наведені наслідки цієї теореми, що дозволяє значно спростити ув'язку кутових і радіальних параметрів в симплексі площини для переходу від однієї параметризації до іншої.

Література

1. *Конопацький Є.В.* Бікутова та бірадіальна параметризації в площині загального положення / Є.В. Конопацький // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомчий науково-технічний збірник. – Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.156-160.
2. Геометричний сенс узагальнених тригонометричних функцій. / І.Г. Балюба, В.М. Верещага, Є.В. Конопацький [та ін.] / Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4.

Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С.42-47.
3. *Конопацький Є.В.* Дослідження властивостей узагальнених тригонометричних функцій / Є.В. Конопацький // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С. 263-267.
4. *Конопацький Є.В.* Використання узагальнених тригонометричних функцій для визначення плоских кривих / Є.В.Конопацький, І.Г. Балюба, В.М. Верещага // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 57. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С.119-124.
5. *Конопацький Є.В.* Конструювання системи спеціальних плоских кривих типу «синусоїда» методом узагальнених тригонометричних функцій / Є.В. Конопацький / Сборник научных трудов SWorld. – Вып. 3. – Том 12. – Иваново: МАРКОВА АД, 2013. – С.76-80.
6. *Konopatskiy E.* Parameterization planes in BN-calculation / E. Konopatskiy / International Conference «Technical sciences: modern issued and development prospects»: Conference Proceedings. – Sheffield: Scope Academic House, 2013. – Vol. 10. – P. 183-187.
7. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дисс. д-ра техн. наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич. – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Е.В. Конопацкий

***Аннотация* – в работе сформулирована и доказана основная теорема обобщенных тригонометрических функций. Также исследованы следствия предложенной теоремы.**

BASED THEOREM OF GENERALIZED TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

E. Konopatsky

Summary

In work is formulated and proved the based theorem of generalized trigonometric functions. Also consequences the offered theorem are investigated.