УДК 514.18

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ТРУБЧАСТОЇ ПОВЕРХНІ, ВІДНЕСЕНОЇ ДО ЛІНІЙ КРИВИНИ, У СИСТЕМІ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА ЛІНІЇ УКОСУ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Національний університет біоресурсів і природокористування України
Муквич М.М., к.т.н.,
Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України "Ніжинський агротехнічний інститут"
Тел. (04631) 2-52-70, (044) 527-82-26

Анотація **– аналітичний опис трубчастої поверхні, віднесеної до ліній кривини, здійснено в системі супровідного тригранника напрямної лінії укосу, яка задана своєю кривиною у функції довжини дуги і величиною кута підйому.**

Ключові слова **– супровідний тригранник Френе, лінія укосу, коефіцієнти квадратичної форми, лінії кривини.**

Постановка проблеми. Аналітичний опис поверхонь, віднесених до ліній кривини, є важливою прикладною геометричною задачею. Це зумовлено зручністю використання вказаної параметризації при дослідженні напружено-деформованого стану оболонок та при визначенні оптимальних траєкторій руху інструментів обробки виробів криволінійної форми. Обов'язковою умовою уникнення суперпозиції чисельних методів у подальших дослідженнях є знаходження параметричних рівнянь поверхонь без використання наближених методів математики.

Аналіз останніх досліджень. Серед конструктивних методів утворення каналових поверхонь, віднесених до ліній кривини, використовується метод конструювання поверхонь у системі супровідного тригранника напрямної кривої [1,3]. Задача знаходження аналітичних умов утворення та віднесення каналових поверхонь до ліній кривини приводить до диференціальних рівнянь, які у загальному випадку не інтегруються в квадратурах [1,3]. Тому для аналітичного опису каналових поверхонь, віднесених до ліній кривини, розглядають часткові випадки їх утворення.

Формулювання цілей статті. Знайти аналітичні умови утворення трубчастої поверхні (як часткового випадку каналової поверхні), віднесеної до ліній кривини, утворюючи її циклічний каркас за допомогою кіл сталого радіуса, які рухаються за вказаним законом у нормальній площині супровідного тригранника лінії укосу.

*Основна частина***.** Нехай криву укосу f задано за допомогою залежності кривини від довжини дуги $k=k(s)$ і кута підйому $\beta = const$. Тоді її параметричні рівняння мають вигляд [2]:

$$x(s) = \cos\beta \cdot \int \cos\left(\frac{1}{\cos\beta} \int k ds \right) ds;$$
$$y(s) = \cos\beta \cdot \int \sin\left(\frac{1}{\cos\beta} \int k ds \right) ds; \qquad z(s) = s \cdot \sin\beta. \tag{1}$$

Векторне рівняння кривої укосу у функції довжини її дуги s має вигляд:

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = x(s) \cdot \bar{i} + y(s) \cdot \bar{j} + z(s) \cdot \bar{k}, \tag{2}$$

де $\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$ – орти нерухомої системи координат $Oxyz$ (рис.1).

При русі тригранника Френе із вершиною A по напрямній кривій (2) коло із центром у точці A, яке лежить у площині γ, утворить циклічний каркас поверхні. Нехай площина γ проходить через орт бінормалі $\bar{b}$ супровідного тригранника напрямної кривої f і утворює із нормальною площиною тригранника кут $\alpha = \alpha(s)$.

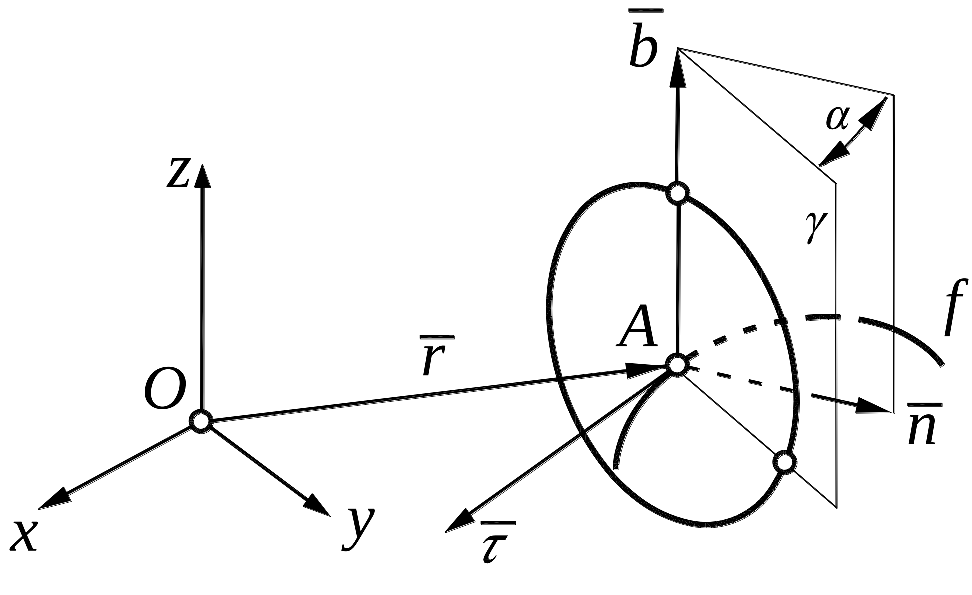


Рис.1. Твірне коло, яке належить площині γ, що обертається навколо орта $\bar{b}$ на кут $\alpha = \alpha(s)$.

У роботі [1] було знайдено векторне рівняння циклічної поверхні, утвореної рухом кола, розташованого в площині γ, яка обертається навколо орта $\bar{b}$ на кут $\alpha = \alpha(s)$:

$$\overline{R}(v,s)=\overline{r}(s)+\overline{\tau}\cdot\rho\cdot\sin\alpha\cdot\cos v+\overline{n}\cdot\rho\cdot\cos\alpha\cdot\cos v+\overline{b}\cdot\rho\cdot\sin v, \qquad (3)$$

де $\rho=\rho(s)-$радіус твірного кола, яке лежить у площині γ, $s-$ довжина дуги напрямної кривої f, $v-$параметр, $0\le v<2\pi.$

Знайшовши коефіцієнти E,F першої та L,M другої квадратичної форми поверхні (3), та використавши достатню умову віднесення циклічного каркасу поверхні до ліній кривини [4] $L\cdot F-M\cdot E=0,$ у роботі [1] визначено аналітичну умову утворення каналової поверхні:

$$\begin{aligned}\sigma\cdot\rho\cdot\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin v-\rho\cdot\rho_s'(\alpha_s'-k)\cdot\sin v+\\+\sigma\cdot\rho\cdot\rho_s'\sin\alpha\cdot\cos v=0,\end{aligned} \qquad (4)$$

де $\sigma-$скрут напрямної кривої f, $k-$кривина напрямної кривої f.

Скрут лінії укосу (2) визначають із виразу [4]:

$$\sigma=k\cdot\operatorname{tg}\beta. \qquad (5)$$

Аналіз умови (4) утворення каналової поверхні для просторової напрямної кривої викликає значні труднощі. Зокрема, для просторової напрямної кривої f $(\sigma\ne 0)$ рівняння (4) перетворюється в правильну рівність при одночасному виконанні умов: $\alpha=0$ і $\rho=const.$ Це підтверджує відоме твердження теорії поверхонь: циклічний каркас кіл трубчастої поверхні утворює сім'ю із ліній кривини, причому твірне коло трубчастої поверхні лежить у нормальній площині лінії центрів.

При виконанні умов $\alpha=0$ і $\rho=const$ тільки одна сім'я координатних ліній (циклічний каркас) є лініями кривини трубчастої поверхні. Щоб знайти сім'ю ліній, ортогональних до множини кіл циклічного каркасу, необхідно розв'язати диференціальне рівняння ортогональних траєкторій (до сім’ї, утвореної при різних значеннях $s=const$) [4]:

$$F\cdot ds+E\cdot dv=0. \qquad (6)$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми трубчастої поверхні, диференціюючи векторне рівняння (3) при $\alpha=0$ і $\rho=const$ і використовуючи формули Френе [4]. Коефіцієнти першої квадратичної форми трубчастої поверхні мають вигляд: $E=\rho^2,$ $F=\sigma\cdot\rho^2.$ Підставивши їх у рівняння (6), отримаємо диференціальне рівняння $\sigma(s)\cdot\rho^2\cdot ds+\rho^2\cdot dv=0,$ загальним розв’язком якого є вираз:

$$v=-\int\sigma(s)ds+u. \qquad (7)$$

У виразі (7): $\sigma(s)-$скрут напрямної кривої укосу f, $u-$стала інтегрування, яка буде новим параметром (замість v) у векторному рівнянні трубчастої поверхні, віднесеної до ліній кривини, яке при $\alpha = 0$ і $\rho = const$ має вигляд:

$$\overline{R}(u,\ s) = \overline{r}(s) + \overline{n} \cdot \rho \cdot \cos\left(-\int \sigma(s)ds + u\right) + \overline{b} \cdot \rho \cdot \sin\left(-\int \sigma(s)ds + u\right). \qquad (8)$$

Підставивши параметричні рівняння (1), вирази їх напрямних косинусів, знайдені в роботі [2], та врахувавши для лінії укосу рівність (5), отримаємо параметричні рівняння трубчастої поверхні із лінією центрів (1), яка віднесена до координатних ліній кривини:

$$\begin{aligned} X(u,s) &= \cos\beta \int \cos\psi\, ds - \\ &\quad -\rho\left[\sin\psi \cos(u - \psi\sin\beta) + \sin\beta\cos\psi \sin(u - \psi\sin\beta)\right]; \\ Y(u,s) &= \cos\beta \int \sin\psi\, ds + \\ &\quad +\rho\left[\cos\psi \cos(u - \psi\sin\beta) - \sin\beta\sin\psi \sin(u - \psi\sin\beta)\right]; \\ Z(u,s) &= s\sin\beta + \rho\cos\beta\ \sin(u - \psi\sin\beta), \end{aligned} \qquad (9)$$

де $\psi(s) = \dfrac{1}{\cos\beta}\int k(s)ds,\ \beta = const$ – кут підйому, $k = k(s)$ – залежність кривини від довжини дуги лінії укосу (1).

Приклад. Нехай лінією центрів трубчастої поверхні є крива укосу, задана за допомогою залежностей $k(s) = \dfrac{a}{s}$ (a – параметр кривої) і кута підйому $\beta = const$. Тоді її параметричні рівняння (1) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s\cos^2\beta}{a^2 + \cos^2\beta} \cdot \left[\cos\beta\cos\left(\frac{a\ln s}{\cos\beta}\right) + a\sin\left(\frac{a\ln s}{\cos\beta}\right)\right]; \\ y(s) &= \frac{s\cos^2\beta}{a^2 + \cos^2\beta} \cdot \left[\cos\beta\sin\left(\frac{a\ln s}{\cos\beta}\right) - a\cos\left(\frac{a\ln s}{\cos\beta}\right)\right]; \\ z(s) &= s\sin\beta. \end{aligned} \qquad (10)$$

Підставивши залежність $k(s) = \dfrac{a}{s}$ у параметричні рівняння (9), отримаємо параметричні рівняння трубчастої поверхні із лінією центрів (10), яка віднесена до координатних ліній кривини:

$$X(u,s)=x(s)-\rho\cdot\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{a\ln s}{\cos\beta}\right)\cos(u-a\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\ln s)+\\ \qquad+\sin\beta\cos\left(\dfrac{a\ln s}{\cos\beta}\right)\sin(u-a\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\ln s)\end{array}\right];$$

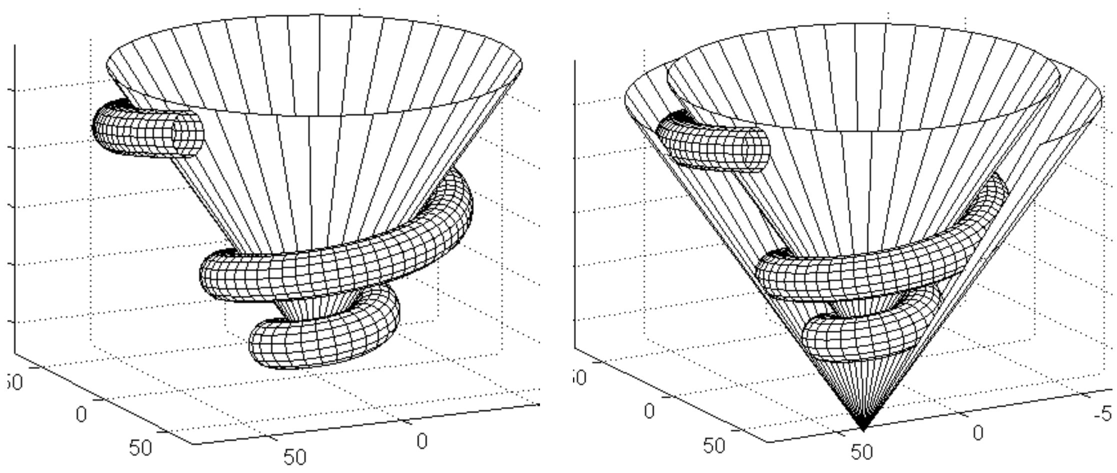
$$Y(u,s)=y(s)+\rho\cdot\left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{a\ln s}{\cos\beta}\right)\cos(u-a\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\ln s)-\\ \qquad-\sin\beta\sin\left(\dfrac{a\ln s}{\cos\beta}\right)\sin(u-a\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\ln s)\end{array}\right]; \qquad (11)$$

$$Z(u,s)=z(s)+\rho\cdot\cos\beta\cdot\sin(u-a\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\ln s).$$

Вирази $x(s);y(s);z(s)$ у параметричних рівняннях (11) визначаються із рівнянь (10).

Напрямна лінія (10) є лінією укосу, яка лежить на конусі. Щоб знайти рівняння поверхні обертання (конуса) знайдемо закономірність зміни відстані $\mu(s)$ від осі конуса до точки на конічній лінії укосу:

$$\mu(s)=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{s\cos^2\beta}{\sqrt{a^2+\cos^2\beta}}. \qquad (12)$$



а) б)

Рис. 2. Трубчаста поверхня (11), віднесена до координатних ліній кривини, у якої лінією центрів є крива укосу (10),

задана кутом підйому $\beta=\dfrac{\pi}{18}$ і

натуральним рівнянням $k(s)=\dfrac{8}{s}$:

а) поверхня дотична до внутрішнього конуса;
б) поверхня дотична до двох конусів: внутрішнього і зовнішнього.

Залежності (12) і $z(s) = s \cdot \sin\beta$ утворюють параметричні рівняння меридіана поверхні обертання. Виключивши із даних рівнянь s, отримаємо лінійну залежність, яка задає меридіан конуса (пряму):

$$z(\mu) = \frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} \cdot \mu. \qquad (13)$$

Отже, меридіаном поверхні обертання є пряма (13), яка є твірною конуса, нахиленою до горизонтальної площини Oxy під кутом, що дорівнює: $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\right)$.

На рис.2 зображено трубчасту поверхню, віднесену до ліній кривини, дотичну до конусів. Ця поверхня побудована за рівняннями (11) із лінією центрів (10) при $k(s) = \frac{8}{s}$; $\beta = \frac{\pi}{18}$.

Висновки. Конструювання трубчастої поверхні у системі супровідного тригранника лінії укосу дало можливість з’ясувати аналітичні умови віднесення поверхні до ліній кривини. Знайдена параметризація дозволяє проектувати технічні форми із спрощеним аналітичним описом трубчастої поверхні.

Література

1. *Пилипака С.Ф.* Конструювання циклічних поверхонь сім'ями ортогональних ліній в системі супровідного тригранника напрямної кривої/ С.Ф. Пилипака // Прикладна геометрія та інженерна графіка.– К.: КДТУБА, 1998.– № 63. – С. 159–161.
2. *Пилипака С.Ф.* Конструювання лінійчатих поверхонь загального виду в системі супровідного тригранника напрямної просторової кривої / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2007. – Вип 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 35. – С. 10–18.
3. *Фролов О. В.* Каналові поверхні та їх віднесення до ліній кривини / О.В. Фролов // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 22. – С. 112–120.

4. *Выгодский М.Я.* Дифференциальная геометрия / М.Я. Выгодский. – М. – Л.: ГТТИ, 1949. – 511 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТРУБЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОТНЕСЁННОЙ К ЛИНИЯМ КРИВИЗНЫ, В СИСТЕМЕ СОПРОВОЖДАЮЩЕГО ТРЁХГРАННИКА ЛИНИИ УКОСА

С.Ф. Пилипака, Н.Н. Муквич

Аннотация **– аналитическое описание трубчатой поверхности, отнесённой к линиям кривизны, осуществляется в системе сопровождающего трёхгранника направляющей линии укоса, которая задана своей кривизной в функции длины дуги и величиной угла подъема.**

THE ANALYTICAL DESCRIPTION OF A TUBULAR SURFACE, REFERRED TO LINES OF CURVATURE, IN SYSTEM OF THE ACCOMPANYING THREE-EDGE OF A SLOPE CURVE

S. Pylypaka, M. Mukvich

Summary

The analytical description constructing of a tubular surface, referred to the lines of curvature, is carried out in the system of accompanying of a slope curve, which is set the curvature in the function of length of arc and size of corner of getting up.