УДК 514.18

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ФОРМОУТВОРЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ МНОЖИН У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Шоман О.В., д.т.н.,
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут",
Даниленко В.Я.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
Тел. (057)707-64-31

Анотація **– в статті проведено аналіз задач, де формоутворення геометричних об'єктів (геометричних множин) в просторі другого виміру реалізується через тривимірний простір. Наведено графічні приклади формоутворення паралельних множин. Показано доцільність запропонованого підходу до розв'язання визначених типів задач.**

Ключові слова **– формоутворення, геометричне моделювання, паралельні множини, криві та поверхні.**

Постановка проблеми. Розв'язання задач формоутворення сімей геометричних образів часто стикається з ускладненням реалізації алгоритмів, якщо необхідно задовольнити умови, наприклад, паралельності геометричних елементів, що мають особливі точки або самоперетини. До того ж, виникають питання точності та адекватності розв'язків. При цьому розв'язок можна одержати точний, але геометрична форма отриманих об'єктів не відповідатиме вимогам практики. Це є важливим у галузі геометричного моделювання гетерогенних процесів [1]. Таким чином, необхідно шукати шляхи для вирішення проблем формоутворення згаданих об'єктів.

Аналіз останніх досліджень. В [2,5] розроблені методи формоутворення сімей кривих і поверхонь стосовно візуалізації розв'язків задач моделювання гетерогенних процесів.

Формулювання цілей статті. Визначити типи задач, де доцільною є реалізація алгоритмів формоутворення двовимірних сімей геометричних об'єктів через моделювання у тривимірному просторі.

Основна частина. Геометрична інтерпретація алгоритму опису паралельних ліній за допомогою рівнянь може бути реалізована, коли рівняння мають вигляд $t = F(x, y)$, де функція F обирається з урахуванням геометричної форми вихідної кривої та необхідних властивостей паралельності ліній рівня її графіка. При цьому графік згаданої функції F, повинен збігатися з поверхнею однакового нахилу. В кожній конкретній задачі, де потрібно описати лінії у вигляді рівняння, завжди знайдуться додаткові умови або положення, за якими обиратиметься певне рівняння з множини можливих. Нагадаємо [2], що опис класу поверхонь однакового нахилу і сімей паралельних кривих реалізують метод розв'язання диференціального рівняння в частинних похідних типу ейконала, метод складання і розв'язання нормального рівняння; інтегральна поверхня, через яку визначається сім'я плоских кривих – еквіпотенціалі фізичного поля, є графічною інтерпретацією в методі з використанням елементів теорії функцій комплексної змінної.

Отже, сім'ю паралельних кривих на площині $z = 0$ у системі координат Oxy можна побудувати як множину суміщених проекцій перерізів площинами $z = \text{const}$ поверхні однакового нахилу (з кутом нахилу 45° при $a = 1$) [2], що задовольняє рівняння ейконала:

$$\left(\left|\text{grad } z(x,y)\right|\right)^2 \equiv \left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)^2 = a. \qquad (1)$$

Шукана інтегральна поверхня, як правило, неоднозначна в напрямі осі Oz, тому слід використовувати чисельні методи для інтегрування рівняння (1) [2]. Точне розв'язання рівняння ейконала, візуалізація інтегральних поверхонь і паралельних кривих здійснені для початкових кривих, що самі себе перетинають або мають особливі точки. На рис. 1 наведено інтегральні поверхні (розв'язки рівнянь ейконала) і сім'ї плоских кривих, паралельних до: 4-пелюсткової рози $x = 3\cos t \sin 2t$; $y = 3\sin t \sin 2t$ (рис. 1, *а, б*); кардіоїди $x = 2\cos t(1+\sin t)$; $y = 2\sin t(1+\sin t)$ (рис. 1, *в, г*); гіпоциклоїди $x = 2\cos t + \cos 2t$; $y = 2\sin t - \sin 2t$ (рис. 1, *д, е*).

Оскільки графік нормальної функції [3] – поверхня однакового нахилу, то тут формоутворення сім'ї паралельних кривих пояснюється аналогічно. Для цього необхідно скласти нормальне рівняння. Слід зауважити, що для таких кривих, як графіки показової, логарифмічної та інших функцій, побудова нормальних рівнянь пов'язана з розв'язанням трансцендентних рівнянь, які, взагалі кажучи, точно не розв'язуються. У цьому полягає основна складність процесу опису нормальних рівнянь для довільних кривих. Однак задача побудови наближеного нормального рівняння може бути розв'язана практично для будь-якої кривої, що із заданою точністю апроксимується кінцевою кількістю дуг і відрізків [2,3]. На рис. 2 у графічному вигляді наведені розв'язки нормальних рівнянь для: багатокутника з вершинами (-2; 3), (-4; 0), (-2; -3), (3; -4), (3; -1), (5; 3), (1; 1) (рис. 2, *а, б*); дуги, що проходить через точки з координатами (4; 6), (-3; 8), (-11; 1) (рис. 2, *в, г*); системи довільно розташованих відрізків (нормальна функція $z = F(x, y, t)$ при $t = 120$) (рис. 2, *д, е*).

Одні зображення можуть являти собою просторові моделі, що зберігають геометричну схожість з об’єктами, інші виступають у ролі знакових і символьних позначень образів. Ті з зображень, що пов’язані з тривимірним простором, повинні бути забезпечені відповідними алгоритмами прямих і обернених перетворень простору [4].

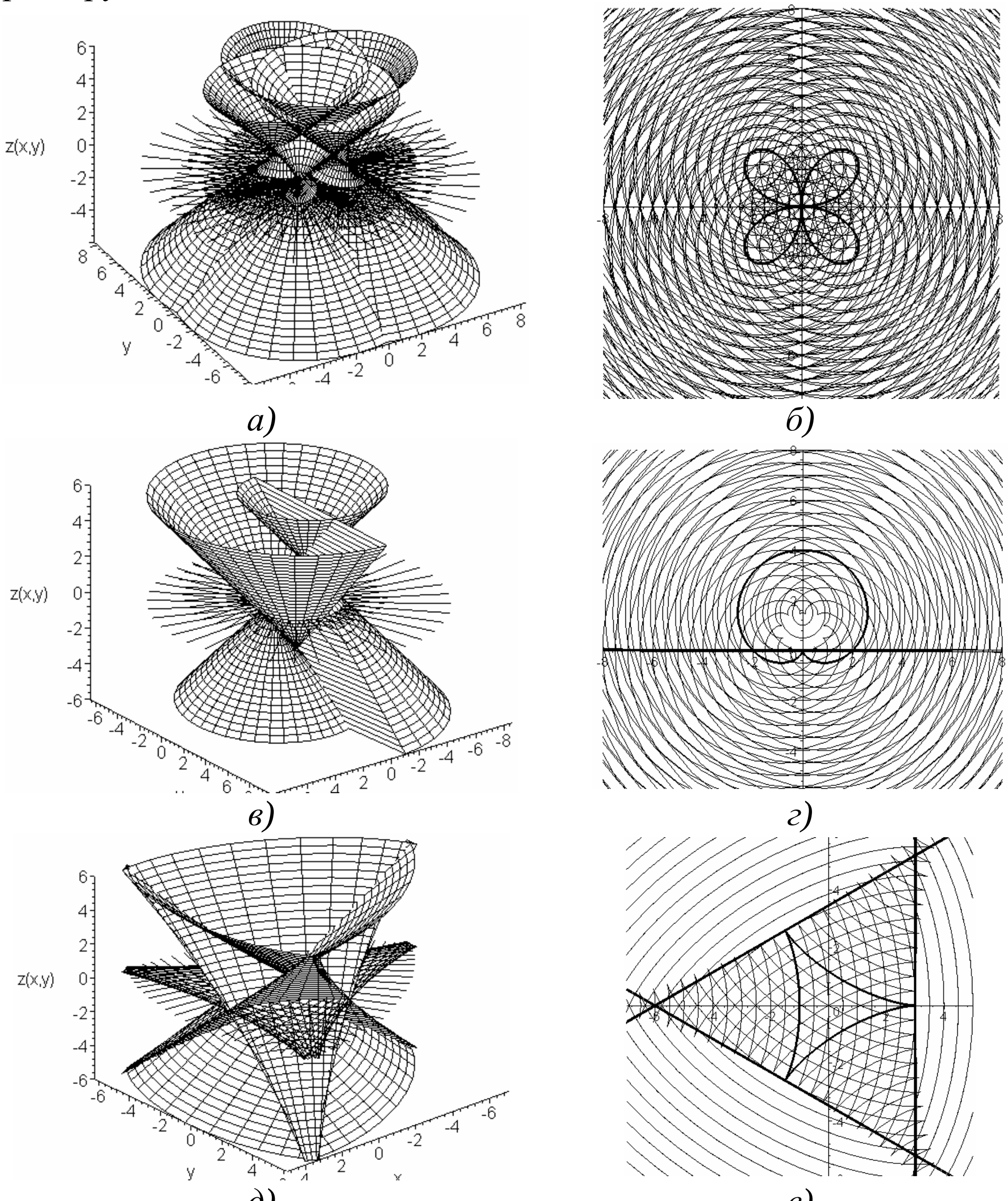

Рис. 1. Розв’язки рівняння ейконала в задачах формоутворення сім’ї кривих, паралельних до: *а, б* –чотирипелюсткової рози; *в, г* – кардіоїди; *д, е* –гіпоциклоїди.

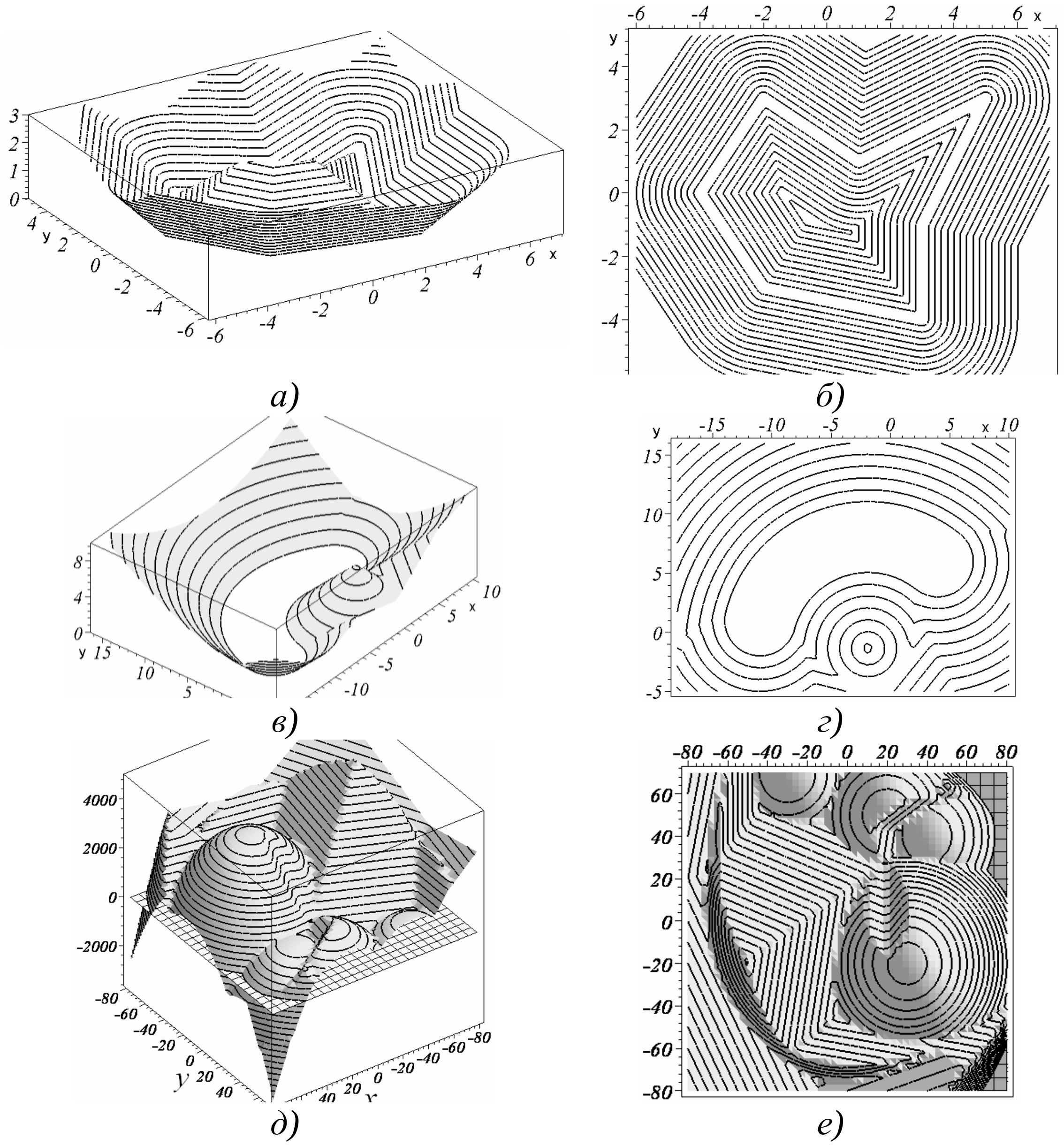

Рис. 2. Розв’язки за допомогою нормальних функцій в задачах формоутворення сім’ї кривих, паралельних до: *а, б* –багатокутника; *в, г* –дуги кола; *д, е* – довільно розташованих відрізків.

Наочним прикладом перетворень одного комплексного простору в інший є конформні відображення і візуалізовані тривимірні та двовимірні розв’язки [5] граничних задач теорії функцій комплексної змінної. Просторовими графіками дійсної Re$W(z)$ та уявної Im$W(z)$ частин комплексного потенціалу вихору $W(z)=\dfrac{Q+i\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0)$ (де Q – потужність вихору, Γ – напруга вихору) пояснюють [5] формоутворення силових ліній вихору з центром у точці z_0. Конформна сітка тут є сукупністю двох типів силових ліній вихору (за стрілкою годинника та в протилежному напрямі). На рис. 3, *а–г* при $Q = 10$ і $\Gamma = 5$ показано поверхні Re$W(z)$ і Im$W(z)$ та еквіпотенціали поля і лінії струменів. Еквіпотенціалі та лінії струменів фізичного поля з логарифмічними особливими точками комплексних потенціалів можна вважати лініями рівня функцій, що входять до описів їх дійсних і уявних частин. Такі властивості використовуються при якісному аналізі розв’язків деяких граничних задач (рис. 3, *д*, *е*).

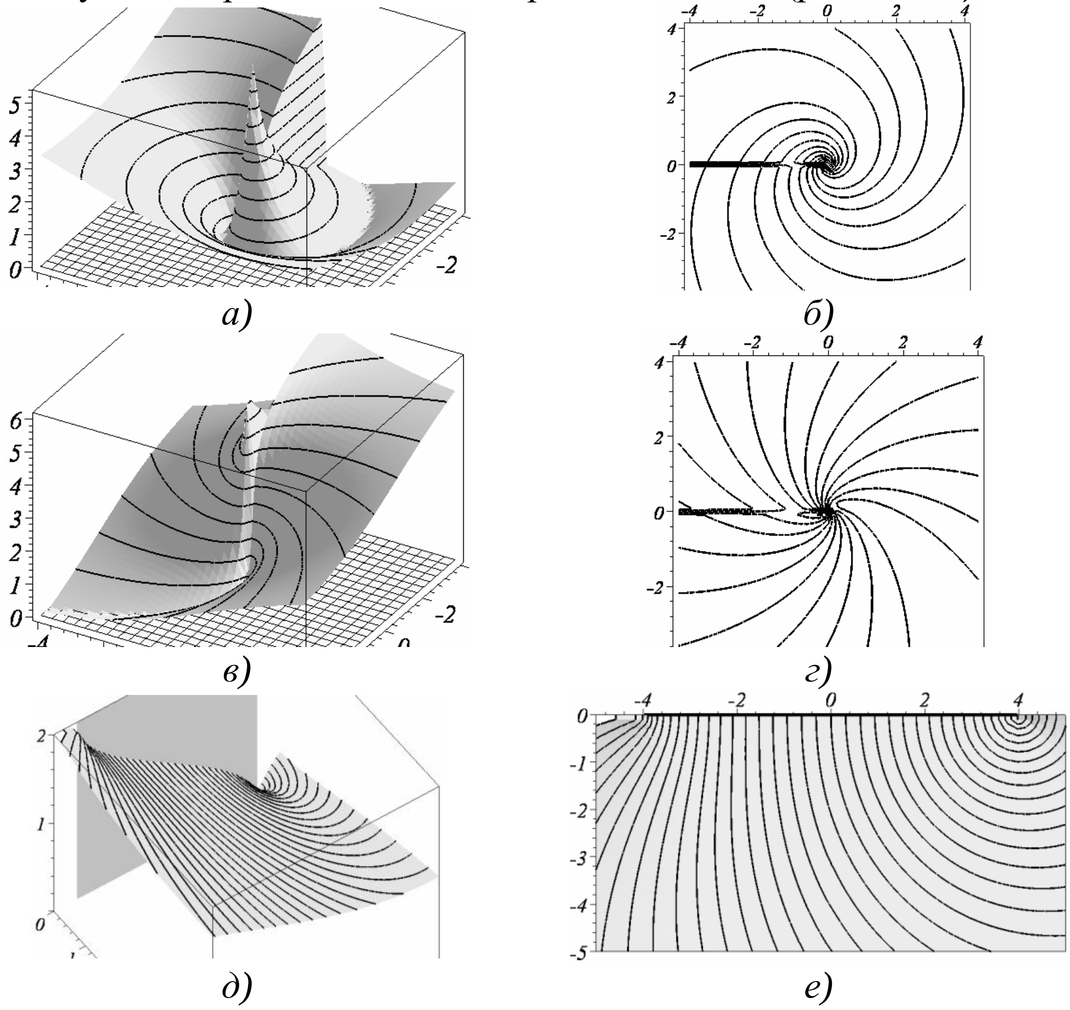

Рис. 3. Розв’язки з допомогою комплексних потенціалів аналітичних функцій в задачах формоутворення сім’ї кривих як: *а, б* – еквіпотенціалей вихору; *в, г* – ліній струменя; *д, е* – ліній рівня графіка аналітичної функції при моделюванні фізичного поля.

Висновки. Розв’язання задач формоутворення двовимірних сімей геометричних образів шляхом використання тривимірних побудов збільшує варіативність результатів. Дослідження поведінки інтегральних поверхонь є одним зі шляхів дослідження сімей двовимірних об’єктів. Наприклад, оскільки реальні граничні лінії явища або процесу мають складну геометричну форму, то графіком шуканої функції буде інтегральна поверхня, отримана шляхом "деформування" поверхні однакового нахилу. "Деформований" характер інтегральної поверхні визначає непаралельний характер сім’ї кривих відносно реальної кривої.

Література
1. *Барре П.* Кинетика гетерогенных процессов: пер. с англ./ П. Барре. – М.: Наука, 1970 – 304 с.
2. *Шоман О.В.* Паралельні множини в геометричному моделюванні явищ і процесів : дис... д-ра техн. наук: 05.01.01 / О.В. Шоман. – Харків: НТУ "ХПІ", 2007. – 288 с.
3. *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики / В.Л. Рвачов. – К.: Техника, 1967. – 212 с.
4. *Даниленко В.Я.* Розробка алгоритмів лінійних та нелінійних перетворень для зображення об'єктів автомобільних доріг / В.Я. Даниленко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип. 18. – С. 203–208.
5. *Куценко Л.М.* Геометричне моделювання силових ліній вихору при розв'язанні задачі фільтрації / Л.М. Куценко, О.В. Шоман // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2005. – Вип. 4. – Т. 29. – С. 10–17.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.В. Шоман, В.Я. Даниленко

Аннотация **– в статье проведен анализ задач, где формообразование геометрических объектов (геометрических множеств) в пространстве второго измерения реализуется через трехмерное пространство. Приведены графические примеры формообразования параллельных множеств. Показана целесообразность предложенного подхода к решению определенных типов задач.**

A DECISION OF TASKS OF FORM FORMATION OF TWO-DIMENSIONAL GEOMETRICAL SETS IS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

O. Shoman, V. Danylenko

Summary

The analysis of problems is conducted in the article, where form formation of geometrics (geometrical sets) in space of the second measuring will be realized through three-dimensional space. Graphic examples of form formation of parallel sets are made. Expediency offered approach is shown near the decision of certain types of problems.