УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ В ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ МАТЕМАТИЧНИХ МАЯТНИКІВ

Єремєєв В. С., д.т.н.,
Кузьминов В. В.
Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Богдана Хмельницького
Тел. (0619) 42-42-42

***Аннотація* – запропонована геометрична модель для вивчення коливальних явищ у двовимірній гратці на основі математичних маятників різної маси з довільними початковими і граничними умовами. Розроблена програма для проведення розрахунків і візуалізації коливань окремих вузлів.**

***Ключові слова* – коливальний процес, математичний маятник, геометрична модель, резонансні явища.**

Постановка проблеми. Природа коливальних явищ вивчена досить добре [4]. Вони супроводжують всі механічні конструкції, де має місце обертання частин машин, двигунів літаків та кораблів і т. ін. Різні частини механічної системи або система в цілому можуть прийти в резонанс зі змушуючою силою. Явище резонансу може бути причиною руйнування машин, будинків, мостів та інших споруд. Тому вивчення коливальних процесів у складних умовах навантаження має великий практичний інтерес.

Аналіз останніх досліджень. Аналітичне рішення рівняння коливань отримано для багатьох простих моделей: математичний маятник, випадок ангармонічного коливання, коливання з однією і двома ступенями волі при наявності тертя або зовнішньої сили і т. д. Використання чисельних методів [1] дозволяє вирішувати більш складні завдання з багатьма степенями свободи. В роботі [2] запропонована математична модель коливань в двомірній системі з закріпленими межами. Ця робота є її продовженням. Вона присвячена моделюванню механічних коливань двовимірної прямокутної сітки при довільних початкових і граничних умовах.

Формулювання цілей статті. Розробка моделі для аналізу коливань двовимірної прямокутної сітки при довільних початкових і граничних умовах.

Основна частина. Розглянемо коливальну механічну систему, яка представляє собою плоску рівномірну прямокутну сітку

$\{M_{i,j}(ih_g, jh_v): i=\overline{0,m+1}, j=\overline{0,n+1}\}$ (рис.1). У вузлах $\{M_{i,j}(ih_g, jh_v): i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\}$ сітки розташовані кульки масами $\{m_{i,j}: i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\}$. Між кожною парою точок $\{M_{i-1,j}, M_{i,j}\}$, $i=1\ldots m+1$, $j=1\ldots n$ є зв'язок (пружина), який протидіє деформаціям стискування/розтягу із жорсткістю $k^g_{i,j}$; також між кожною парою точок $\{M_{i,j-1}, M_{i,j}\}$, $i=1\ldots m$, $j=1\ldots n+1$ є зв'язок (пружина) із жорсткістю $k^v_{i,j}$.

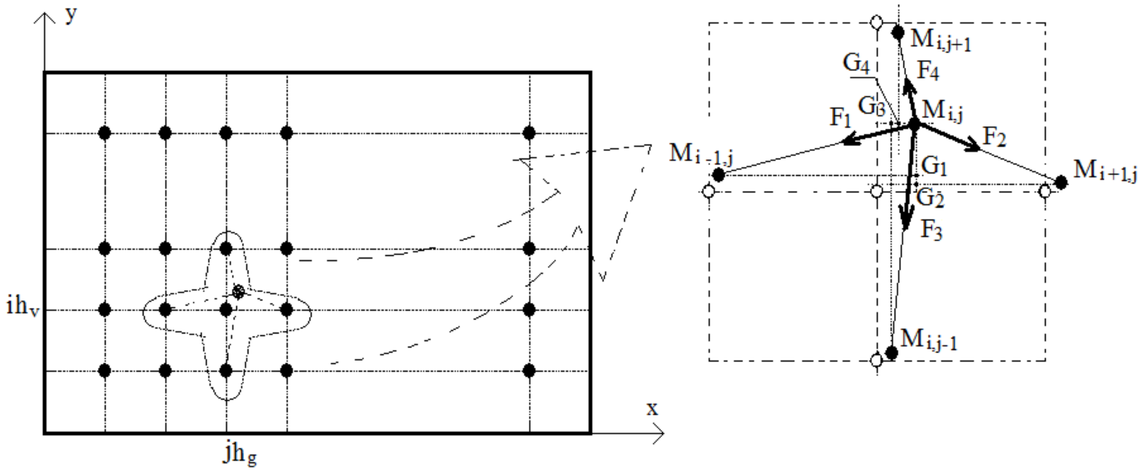

Рис.1. Схема розташування кульок у двомірній гратці.

Граничні точки сітки $Gr=\{M_{i,j}: i\in\{0,m+1\}, j=\overline{1,n} \vee i=\overline{1,m}, j\in\{0,n+1\}\}$ коливаються з заданими частотами і амплітудами. При коливанні кожної кульки на неї діє сила тертя, яка пропорційна швидкості кульки, тобто: $\overline{F_{mpi,j}}=-\mu\overline{v_{i,j}}$.

Координати та проекції швидкості кожної кульки будемо вважати $\{(j\ h_g+x_{i,j}(t),\ i\ h_v+y_{i,j}(t)): i=1\ldots m, j=1\ldots n)\}$, $\{(v_{xi,j}(t), v_{yi,j}(t)): i=1\ldots m, j=1\ldots n)\}$. Відомі початкові відхилення усіх кульок $\{(x_{i,j}(0)=x_{i,j0}, y_{i,j}(0)=y_{i,j0}): i=1\ldots m, j=1\ldots n)\}$, та їх початкові швидкості $\{(v_{xi,j}(0)=v_{xi,j0}, v_{yi,j}(0)=v_{yi,j0}): i=1\ldots m, j=1\ldots n)\}$. Треба із заданою точністю ε отримати для кожної кульки в інтервалі часу $t\in[0;\tau]$ закони зміщення координат від відповідної точки рівноваги та швидкості, тобто функції $\{(x_{i,j}(t), y_{i,j}(t), v_{xi,j}(t), v_{yi,j}(t)): i=1\ldots m, j=1\ldots n\}$.

Позначимо сили, що діють на деяку з кульок (i, j) з боку зв'язків, що з'єднують дану кульку з кульками $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ відповідно $F_{1i,j}$, $F_{2i,j}$, $F_{3i,j}$, $F_{4i,j}$. Їх значення:

$$F_{1i,j}=k^g_{i,j}(s^{(-1,0)}_{i,j}-h_g), \quad F_{2i,j}=k^g_{i+1,j}(s^{(+1,0)}_{i,j}-h_g),$$

$$F_{3i,j} = k^{v}_{i,j}(s^{(0,-1)}_{i,j} - h_v), \quad F_{4i,j} = k^{v}_{i,j+1}(s^{(0,+1)}_{i,j} - h_v),$$

де

$$s^{(-1,0)}_{i,j} = \sqrt{(x_{i-1,j} - x_{i,j} - h_g)^2 + (y_{i-1,j} - y_{i,j})^2},$$
$$s^{(+1,0)}_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j} + h_g)^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \qquad (1)$$
$$s^{(0,-1)}_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j-1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j-1} - y_{i,j} - h_v)^2},$$
$$s^{(0,+1)}_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j} + h_v)^2}.$$

– миттєві довжини відповідних зв'язків (за теоремою Піфагору у трикутниках $M_{i-1j}G_1M_{ij}$, $M_{i+1j}G_2M_{ij}$, $M_{ij-1}G_3M_{ij}$, $M_{ij+1}G_4M_{ij}$, рис.1). Проекції цих сил на координати OX и OY дорівнюють:

$$F_{1xi,j} = \mathrm{F}_{1i,j}\frac{G_1M_{i-1,j}}{M_{i-1,j}M_{i,j}} = F_{1i,j}\frac{x_{i-1,j} - x_{i,j} - h_g}{s^{(-1,0)}_{i,j}} = k^{g}_{i,j}(s^{(-1,0)}_{i,j} - h_g)\frac{x_{i-1,j} - x_{i,j} - h_g}{s^{(-1,0)}_{i,j}},$$

$$F_{2xi,j} = F_{2i,j}\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j} + h_g}{s^{(+1,0)}_{i,j}} = k^{g}_{i+1,j}(s^{(+1,0)}_{i,j} - h_g)\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j} + h_g}{s^{(+1,0)}_{i,j}},$$

$$F_{3xi,j} = k^{v}_{i,j}(s^{(0,-1)}_{i,j} - h_v)\frac{x_{i,j-1} - x_{i,j}}{s^{(0,-1)}_{i,j}}, F_{4xi,j} = k^{v}_{i,j+1}(s^{(0,+1)}_{i,j} - h_v)\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{s^{(0,+1)}_{i,j}},$$

$$F_{1yi,j} = k^{g}_{i,j}(s^{(-1,0)}_{i,j} - h_g)\frac{y_{i-1,j} - y_{i,j}}{s^{(-1,0)}_{i,j}}, F_{2yi,j} = k^{g}_{i+1,j}(s^{(+1,0)}_{i,j} - h_g)\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{s^{(+1,0)}_{i,j}},$$

$$F_{3yi,j} = k^{v}_{i,j}(s^{(0,-1)}_{i,j} - h_v)\frac{y_{i,j-1} - y_{i,j} - h_v}{s^{(0,-1)}_{i,j}}, F_{4yi,j} = k^{v}_{i,j+1}(s^{(0,+1)}_{i,j} - h_v)\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j} + h_v}{s^{(0,+1)}_{i,j}}.$$

Крім того, на кожну кульку з боку середовища діє дисипативна сила (сила тертя), проекції якої на вісі координат наступні:

$$F_{mpxi,j} = -\mu v_{xi,j},\ F_{mpyi,j} = -\mu v_{yi,j}.$$

Другий закон Ньютона для руху кульки можна записати так:

$$m_{i,j}\dot{v}_{xi,j} = F_{1xi,j} + F_{2xi,j} + F_{3xi,j} + F_{4xi,j} + F_{mpxi,j},$$
$$m_{i,j}\dot{v}_{yi,j} = F_{1yi,j} + F_{2yi,j} + F_{3yi,j} + F_{4yi,j} + F_{mpyi,j},$$

де крапка над літерою позначає однократне диференціювання по змінній часу.

Алгоритм рішення системи диференціальних рівнянь розглянуто в роботах [1,3]. Для дослідження коливальних процесів створена програма на алгоритмічній мові Delphi [4]. В якості прикладу розглянемо коливальний процес в решітці з 11x11 вузлів. У розрахунках приймалося, що на межі при x=0 і x=10 діють сили синусоїдальної природи з амплітудою, що дорівнює 0.1. Залежність амплітуди коливання вузла в п'ятому рядку і п'ятому стовпці наведено на рис. 2 та 3.

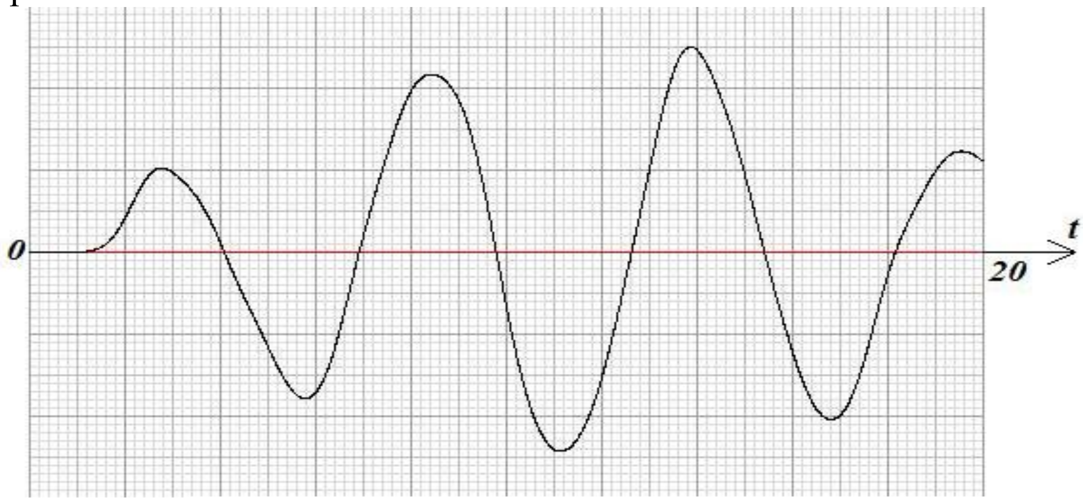

Рис. 2. Залежність амплітуди коливання вузла в п'ятому рядку і п'ятому стовпці (частота коливань на межі 0.2).

З рис. 2 видно, що характер коливання вузла відрізняється від гармонійного – амплітуда і частота змінюється з часом, причому амплітуда в деяких випадках майже в три рази перевищує амплітуду, яка була задана на межі.

Чисельні експерименти показали, що коливальний процес у системі у величезній мірі залежить від частоти. На рис. 3 представлена тимчасова залежність амплітуди того ж вузла при незначній зміні частоти від 0.2 до 0.25.

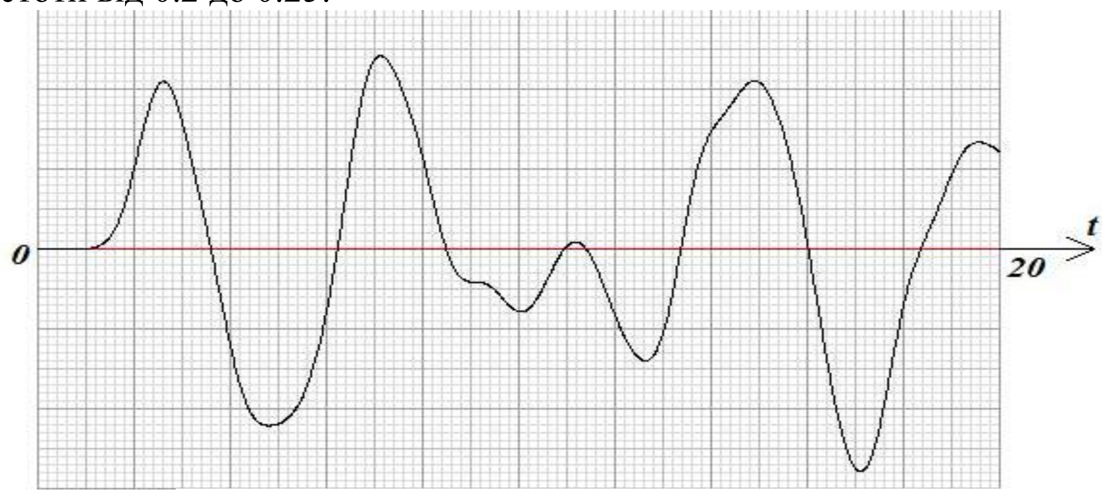

Рис. 3. Залежність амплітуди коливання вузла в п'ятому рядку і п'ятому стовпці (частота коливань на межі 0.25).

Якщо частота коливань, яка задається на межі, наближається до власної частоти системи, виникають резонансні явища - амплітуда коливань в окремих в вузлах необмежено зростає.

Висновки. Розроблена геометрична модель для проведення аналізу релаксаційних явищ при механічних коливаннях двовимірної прямокутної рівномірної сітки різної жорсткості й із зосередженими різними масами у вузлах сітки при довільних початкових і граничних умовах. Розроблена програма, яка дозволяє досліджувати коливальний процес у двовимірному випадку в широкому діапазоні динамічних навантажень, які задаються на межах решітки.

Література.
1. *Єремєєв В.С.* Фазовий портрет коливальних процесів математичних маятників у двовимірній гратці / В.С.Єремєєв, В.В.Кузьминов // Праці ТДАТУ. Геометричне моделювання і інформаційні технології проектування. Мелітополь. Випуск 4. – Т. 54. - 2012. С. 48-57.
2. *Савельев И. В.* Курс общей физики, том I. Механика, колебания и волны, молекулярная фізика. – М.:Наука, 1970. – 504с.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М.:Наука, 1974 – 329 с.
4. *Фленов М.Е.* Библия Delphi / М.Е. Фленов– СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 880 с.
5. Явление резонанса. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://xreferat.ru/102/498-1-yavlenie-rezonansa.html.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХМЕРНОЙ СЕТКЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ

В.С.Еремеев, В.В.Кузьминов

***Аннотация* – предложена геометрическая модель для изучения колебательных явлений в двухмерной решётке на основе математических маятников различной массы с произвольными начальными и граничными условиями. Разработана программа для проведения расчётов и визуализации колебаний отдельных узлов.**

THE GEOMETRIC MODEL OF OSCILLATORY PROCESSES IN A TWO-DIMENSIONAL GRID OF MATHEMATICAL PENDULUM

V. Eremeev, V Kuzminov

Summary

The proposed geometric model for the study of oscillatory phenomena in two-dimensional lattice on the basis of mathematical pendulums of different mass with arbitrary initial and boundary conditions. Developed a program for the calculation and visualization of vibrations of individual nodes.