УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ, ЯКА ЗДІЙСНЮЄ ПРЯМОЛІНІЙНІ КОЛИВАЛЬНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ

Несвідомін А.В., аспірант*
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)
Тел. (044) 267-82-26

Анотація **– наведено траєкторно-кінематичні властивості руху частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює прямолінійні коливальні переміщення**.

Ключові слова **– рух частинки, шорстка площина, коливальне переміщення, диференціальні рівняння, траєкторія, швидкість.**

Постановка проблеми. Сепарація зернового вороху на окремі фракції здійснюється за різними технологічними принципами [2], зокрема за рахунок певних переміщень їх частинок по шорсткій коливальній площині. Розробка імітаційних моделей руху частинки по коливальних площинах обумовлює необхідність опрацювання відповідного забезпечення для систем комп'ютерної математики, що складає проблематику даних досліджень.

Аналіз останніх досліджень. В праці [3] опрацьовано аналітичне забезпечення використання супровідних тригранників траєкторії частинки для опису її руху по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює паралельне переміщення в просторі. Розробку імітаційних моделей руху частинки доцільно виконати в середовищі символьної математики Maple [1].

Формулювання цілей статті. Розробити для середовища Maple [1] імітаційну модель руху частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює прямолінійні коливальні переміщення та за її допомогою дослідити траєкторно-кінематичні властивості в залежності від наступних вихідних умов: 1) кінематичних параметрів прямолінійного коливання площини; 2) початкової швидкості V_o кидання частинки; 3) кута α_o напряму її кидання в площині; 4) коефіцієнта зовнішнього тертя f.

Основна частина. При паралельному переміщенні площини (її довільна пряма залишається паралельна сама собі) на рухому

* Науковий керівник – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

частинку в цій площині не діє сила Коріоліса, що значно спрощує формування системи диференціальних рівнянь 2-го порядку закону її руху. В проекціях на осі Ou і Ov локальної системи координат Ouv закон руху частинки запишеться:

$$\begin{cases} Ou := m\,W\cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}_u,\boldsymbol{w}}\right) = F_g\cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}_u,\boldsymbol{G}}\right) - f\,F_N\cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}_u,\boldsymbol{\tau_\rho}}\right) \\ Ov := m\,W\cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}_v,\boldsymbol{w}}\right) = F_g\cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}_v,\boldsymbol{G}}\right) - f\,F_N\cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}_v,\boldsymbol{\tau_\rho}}\right) \end{cases}, \quad (1)$$

де: $\boldsymbol{G} = [0, 0, -1]$ - напрямок сили тяжіння $F_g = mg$ в системі $Oxyz$;

$W = |\boldsymbol{w}|$ – величина прискорення;

$F_N = F_g\cos\left(\widehat{\boldsymbol{N},\boldsymbol{G}}\right) \pm F_C\cos\left(\widehat{\boldsymbol{N},\boldsymbol{n}}\right)$ - сила нормальної реакції;

$F_g = mg$ і $F_C = m\,V^2k$ - сила тяжіння і відцентрова сила;

$\boldsymbol{N} = [0, 0,1]$ - нормаль до площини $\boldsymbol{R}(u, v)$ в точках траєкторії $\boldsymbol{r}$;

$\boldsymbol{n}$ - головна нормаль траєкторії $\boldsymbol{r}$ частинки;

$\boldsymbol{\tau_\rho}$ - вектор дотичної відносної траєкторії $\boldsymbol{\rho}$.

Рівняння площині запишемо у параметричному вигляді:

$$\boldsymbol{R}(u, v) = \boldsymbol{R}[u,\ v,\ 0], \quad (2)$$

де $u \in [u_1..u_2]$, $v \in [v_1..v_2]$ – внутрішні координати поверхні $\boldsymbol{R}(u, v)$.

Існує необмежена кількість паралельних переміщень площини (2) в просторі $Oxyz$, закони яких можуть бути представлені вектор-функцією $\boldsymbol{M}[x(t),\ y(t),\ z(t)]$. Найпростішими із них є:

1) прямолінійне вздовж осі Ox - $\boldsymbol{M}[\upsilon t,\ 0,\ 0]$;
2) рівноприскорене вздовж осі Ox - $\boldsymbol{M}\left[\upsilon t + \frac{wt^2}{2}, 0, 0\right]$;
3) коливальне вздовж осі Ox - $\boldsymbol{M}\left[l\cos(\upsilon t) + \sqrt{L^2 - \sin^2(\upsilon t)}, 0, 0\right]$;
4) коливальне по колу в площині Oxy - $\boldsymbol{M}[l\cos(\upsilon t),\ l\sin(\upsilon t), 0]$ і т.д.

Зупинимося на коливальному переміщенні площини вздовж осі Ox, яке реалізується за допомогою кривошипно-шатунного механізму:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\left[l\cos(\upsilon t) + \sqrt{L^2 - \sin^2(\upsilon t)}, 0, 0\right], \quad (3)$$

де: $\upsilon, \text{с}^{-1}$ - кутова швидкість кривошипа;

$l,\ L, \text{м}$ – відповідно довжини кривошипа та шатуна (рис.1,а).

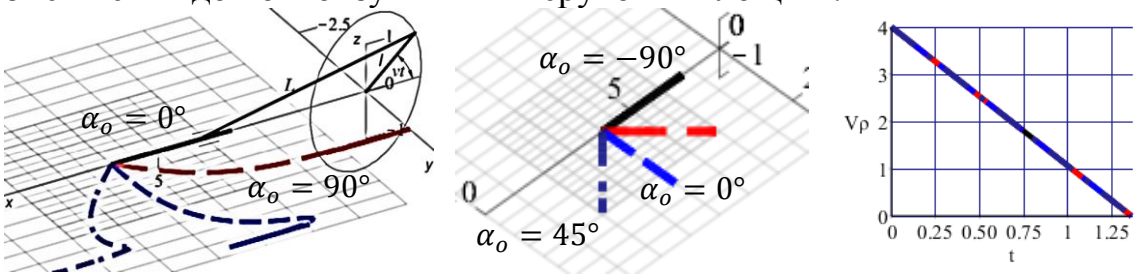
При прямолінійно-коливальному переміщенні (3) площини (2) рівняння траєкторії всіх її точок в системі декартових координат $Oxyz$ запишеться у наступному векторному вигляді:

$$\boldsymbol{H}(u, v) = \boldsymbol{R}[u, v, 0] + \boldsymbol{M}\left[l\cos(\upsilon t) + \sqrt{L^2 - \sin^2(\upsilon t)}, 0, 0\right]. \quad (4)$$

Розроблене програмне забезпечення для середовища символьної математики Maple [1] дозволяє автоматично здійснити всі аналітичні перетворення для виведення закону (1) руху частинки та здійснити його наближене розв’язання. Ці викладки є досить громіздкими, а тому тут їх не будемо наводити, а наведемо тільки результати обчислювальних експериментів руху частинки за різних вихідних умов.

Нехай маємо довжину кривошипа $l = 2$, довжину шатуна $L = 4$,

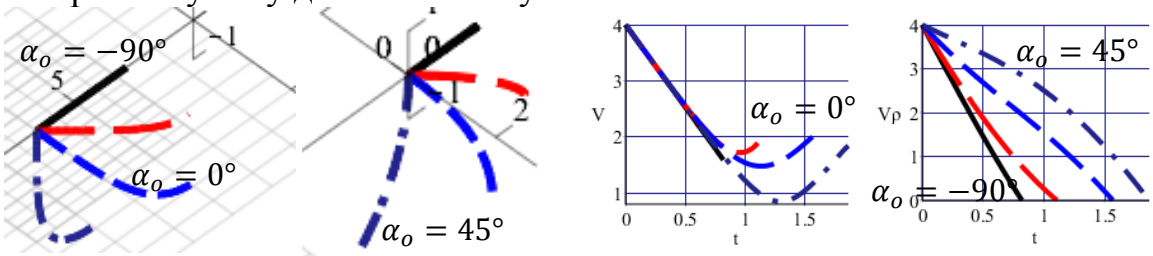
початкову швидкість $V_o = 4$ м/с кидання частинки, її початкове положення $u_o = v_o = 0$ та коефіцієнт тертя $f = 0.3$. Спершу проведемо тестовий експеримент - приймемо кутову швидкість υ кривошипа рівною $\upsilon = 0$ (площина нерухома). Тоді, незалежно від кута $\alpha_o = -90°, -45°, 0°, 45°$ кидання частинки її абсолютні $\boldsymbol{r}(t)$ та відносні $\boldsymbol{\rho}(t)$ траєкторії збігаються вздовж прямих ліній (рис.1,б). Аналогічно поводять себе і графіки абсолютних $V(t)$ та відносних $V_\rho(t)$ швидкостей (рис.1,в) частинок, які демонструють їх рівномірне зменшення до повної зупинки в нерухомій площині.



а) б) в)

Рис.1. Задання переміщення площини та рух частинки в нерухомій площині в залежності кута α_o її кидання.

Збільшимо кутову швидкість υ кривошипу до $\upsilon = 1\ \text{с}^{-1}$. За побудованим графіком (рис.2,г) відносних швидкостей $V_\rho(t)$ частинок можна стверджувати, що всі вони зупиняться на проміжку $t \approx 0.8 - 2$с. Звернемо увагу, що найпершою зупиниться та частинка, яка була кинута під кутом $\alpha_o = -90°$ - в напрямку переміщення коливальної площини при $t = 0$. Ця ж частинка матиме найменшу довжину відносної траєкторії $\boldsymbol{\rho}(t)$ (рис.2,б). Абсолютні траєкторії $\boldsymbol{r}(t)$ частинок (рис.2,а) та графіки абсолютних $V(t)$ швидкостей (рис.2,в) побудовані на проміжку часу до їх повних зупинок.

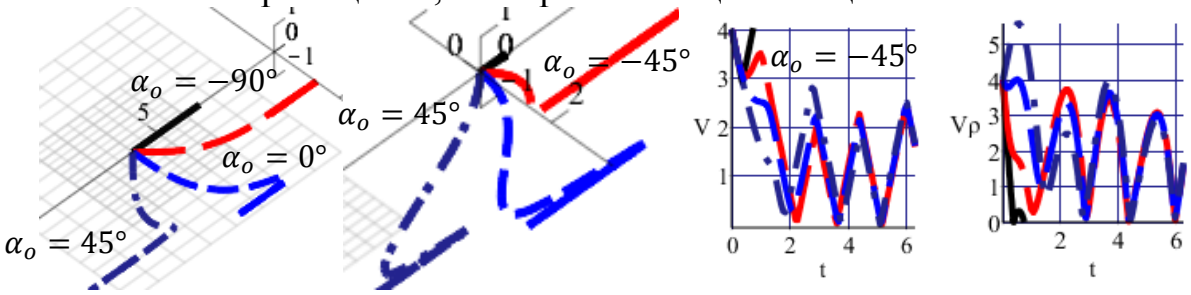


а) б) в) г)

Рис.2. Абсолютні та відносні траєкторії частинки та графіки їх швидкостей для кутової швидкості $\upsilon = 1\ \text{с}^{-1}$ кривошипу.

Ще збільшимо кутову швидкість кривошипу до величини $\upsilon = 2\ \text{с}^{-1}$. Графіки відносних $V_\rho(t)$ швидкостей частинки (рис.3,г) показують, що тільки частинка кинута під кутом $\alpha_o = -90°$ зупиниться через проміжок часу $t \approx 1$с, а всі інші будуть здійснювати відносний рух в площині. Через проміжок часу $t \approx 3$с рух частинок

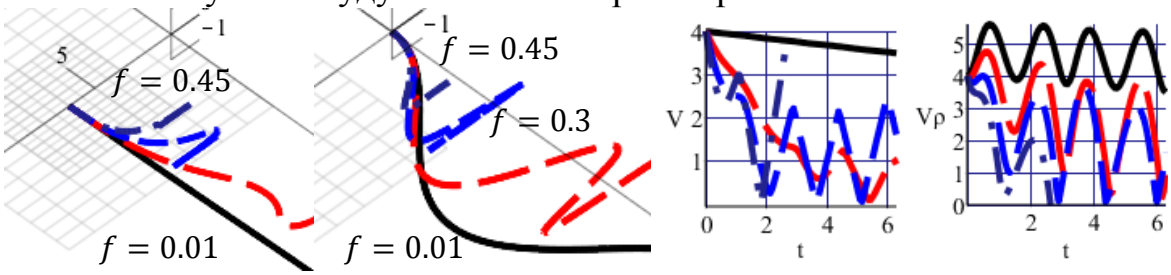
стабілізується – всі вони здійснюють однакові прямолінійні коливальні переміщення, але в різних місцях площини.



а) б) в) г)

Рис.3. Абсолютні та відносні траєкторії частинки та графіки їх швидкостей для кутової швидкості кривошипа $\upsilon = 2\ \mathrm{c}^{-1}$.

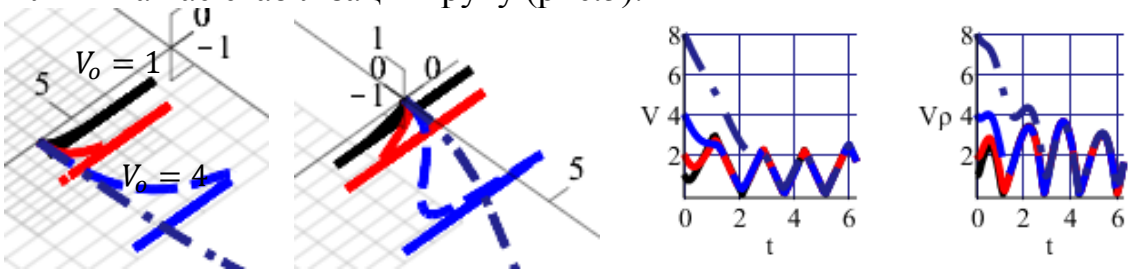
Нехай тепер частинки мають різні коефіцієнти тертя $f = 0.01, 0.15,\ 0.3, 0.45$. Якщо їх кинути, наприклад, перпендикулярно напрямку коливання площини ($\alpha_o = 0°$), то їх траєкторно-кінематичні властивості будуть суттєво відрізнятися (рис.4). Так частинка з коефіцієнтом тертя $f = 0.45$ через проміжок часу $t \approx 2.7$ взагалі зупиниться в коливальній площині. Крім того, чим більший коефіцієнт тертя f, тим швидше частинка стабілізує свою абсолютну та відносну траєкторії. Частинки з меншим коефіцієнтом тертя f мають меншу амплітуду абсолютної траєкторії.



а) б) в) г)

Рис.4. Абсолютні та відносні траєкторії частинки та графіки їх швидкостей в залежності від коефіцієнта тертя f.

Значення початкової швидкості V_o кидання частинки впливає тільки на час стабілізації її руху (рис.5).



а) б) в) г)

Рис.5. Абсолютні та відносні траєкторії частинки та графіки їх швидкостей в залежності від початкової швидкості V_o.

Для частинки з початковою швидкістю $V_o = 1$ м/с її перехід на прямолінійну коливальну траєкторію відбудеться через проміжок часу $t \approx 0.6$с, а для частинки з швидкістю $V_o = 8$ м/с – через $t \approx 3$с.

Висновки. Розділення зернового вороху на окремі фракції на прямолінійно-коливальній шорсткій площині можна здійснити тільки за рахунок неоднакових коефіцієнтів тертя складових частинок, або ж за допомогою різного напрямку їх кидання в коливальній площині. Вплив початкової швидкості кидання частинки впливає тільки на час стабілізації її руху. При певних відношеннях кутової швидкості кривошипа та коефіцієнта тертя частинки, можлива її зупинка в коливальній площині, що для сепарації є неприпустимим.

Література

1. *Аладьев В.З.* Программирование и разработка приложений в Maple/ В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба.- Гродно: ГрГУ, 2007.- 458 с.
2. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. - К.: УАСХН, 1960. -283 с
3. *Пилипака С.Ф.* Тригранник і формули Френе: теорія складного руху матеріальної точки та задачі на кінематику і динаміку при її русі по шорстких поверхнях / С.Ф.Пилипака // Академік П.М.Василенко – яскравий погляд у майбутнє. - К.: Хай-Тек Прес, 2010.- С.297-397.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЧКИ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ, КОТОРАЯ ОСУЩЕСТВЛЯЕТ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

А.В. Несвидомин

Аннотация **- приведены траекторно-кинематические свойства движения частицы по шероховатой горизонтальной плоскости, которая совершает прямолинейные колебательные перемещения.**

MOTION SIMULATION PARTICLES ON A ROUGH HORIZONTAL PLANE WHICH ARE RECTILINEAR OSCILLATING MOVEMENT

A. Nesvidomin

Summary

Given trajectory-kinematic properties of motion of a particle on a rough horizontal plane, performs rectilinear oscillatory movement.