

УДК 314.1(477):519.711

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ КОРОТАЄВА, МАЛКОВА, ХАЛТУРИНОЇ

Єремєєв В.С., д.т.н.,

Кузьмінов В.В.

*Мелітопольський державний педагогічний університет
ім. Б. Хмельницького, м. Мелітополь*

Тел. (0619) 42-42-42

Анотація – в роботі розглядається задача прогнозування демографічних показників, обґрунтовується вибір математичної моделі, яка враховує вплив грамотності та економічного розвитку суспільства на чисельність населення Землі, описується комп'ютерна реалізація моделі і наводяться результати обчислень.

Ключові слова – народжуваність, смертність, демографічна модель, відтворення популяції, ідентифікація параметрів, народжуваність, смертність, чисельність населення.

Постановка проблеми. Прогнозування чисельності населення Землі є актуальним завданням в демографії, яка сформувалася як наука з усіма притаманними їй методами, аксіомами і проблемами [1]. У періодичній пресі публікується багато популярних статей на цю тему. Курс демографії викладається у вищих навчальних закладах. Тим не менш, в суспільстві побутує спрощене уявлення про механізм демографічних процесів. Звідси з'являються помилкові твердження та висновки.

Демографічні процеси є виключно складними за своєю природою. Вони розвиваються під впливом соціальних, економічних, політичних і екологічних і грають велику роль у науковому та технічному прогресі. У зв'язку з цими обставинами виникає звичайне питання про принципову можливість застосування математичних методів до вивчення демографічних проблем.

Можливість аналізу зміни чисельності та вікової структури населення світу як системи довгий час заперечувалася. Розвиток статистичних методів, накопичення демографічних показників і поява потужних програмних засобів змінило ситуацію. Дослідження фахівців в цій області показали, що для опису демографічних процесів можуть застосовуватися математичні методи. У зв'язку з цією обставиною аналіз існуючих моделей і застосування їх має

практичний інтерес. Одна з сучасних математичних моделей демографічних процесів запропонована в дослідженнях Коротаєва А.В., Малкова А.С. і Халтуріної Д.А. [2]. Модель цих авторів складається з трьох диференціальних рівнянь :

$$\begin{cases} \dot{N} = aN^{\varphi_1} S^{\varphi_2} (1-L)^{\varphi_3} \\ \dot{S} = bN^{\varphi_4} S^{\varphi_5} \\ \dot{L} = cL^{\varphi_6} S^{\varphi_7} (1-L)^{\varphi_8} \end{cases} \quad (1)$$

де N – чисельність населення, S – надлишковий дохід на душу населення, L - частка грамотного населення, $a, b, c, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ – відомі додатні коефіцієнти.

Ідентифікація невідомих коефіцієнтів в багатofакторних математичних моделях є досить складним завданням. Вирішення її, як правило, зводиться до дослідження багатовимірної поверхні. Метою цієї статті є ідентифікація параметрів моделі (1) з використанням чисельних методів.

Аналіз останніх досліджень. Одна з перших моделей для прогнозу чисельності біологічних особин запропонована Ферхюльстом [3-4], який запропонував визначати швидкість відтворення популяції тварин диференціальним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = (a_1 N) - (a_2 N + bN^2) \quad (2)$$

де N - чисельність особи, a_1, a_2, b – додатні коефіцієнти.

Модель Лотки-Вольтерра [3], [4] описує динаміку популяцій двох видів, які взаємодіють між собою. Один з видів служить основною їжею для другого виду. Модель являє собою систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - Bxy \\ \frac{dy}{dt} = Cxy - Dy \end{cases} \quad (3)$$

де x – чисельність жертв, y – чисельність хижаків, A, B, C, D – коефіцієнти.

Форрестер, Мор і Еміот на підставі аналізу історичних даних показали, що зростання населення Землі найкраще визначається гіперболічним законом

$$N = \frac{C}{t_0 - t} \quad (4)$$

де C і t_0 – константи.

С.П. Капіца [5] представляє людство у вигляді системи, яка характеризується попарними взаємодіями з обміном інформацією. У результаті швидкість зростання окремих частин істотно залежить від загального розміру системи і визначається квадратичною залежністю

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C} \quad (5)$$

де C – константа.

А.В. Подлазов [6] пояснює гіперболічний закон з позиції розвитку технологій. Він вводить поняття життєзберігаючих технологій. Це поняття дозволяє для різних технологічних нововведень використовувати єдину шкалу вимірювання. Виділення впливу різних факторів на смертність є складним завданням, тому практичне застосування ідеї А.В. Подлазова в даний час утруднено [2].

Гіперболічний закон (4) досить добре узгоджується з збільшенням чисельності населення Землі до середини ХХ століття. З початку 60 -х р.р. динаміка населення Землі все більше відхиляється від гіперболічної кривої [2,3,5], що викликано різким пониженням народжуваності.

Для визначення основних чинників, які впливають на народжуваність, доцільно звернутися до емпіричних даних. Введення додаткових змінних і показників може бути виправданим, якщо це введення дає нову якість. Згідно зі статистичними даними всесвітній валовий продукт (ВВП) корелює з чисельністю населення [2], рис. 1.

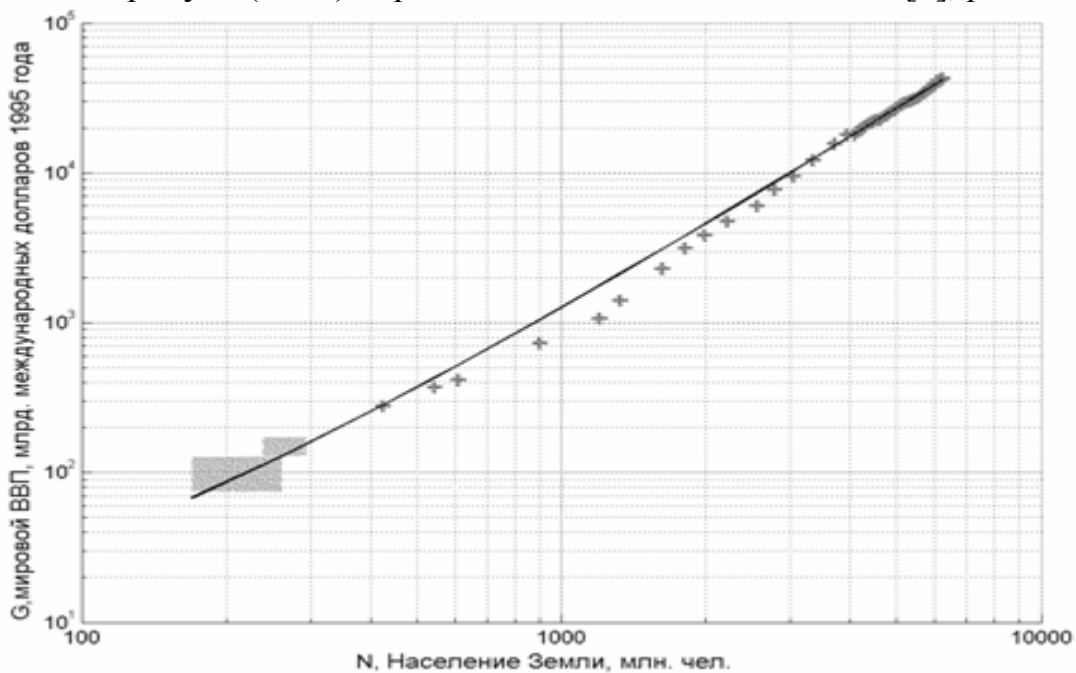


Рис. 1. Кореляційна залежність між ВВП і чисельністю населення Землі.

Цікаві висновки зроблені щодо ролі освіти в динаміці чисельності населення. Досвідчені дані показують, що зростання грамотності, розвиток медичних технологій та системи соціального забезпечення, призводить до зниження народжуваності населення [2]. Вплив освіти та охорони здоров'я на народжуваність особливо велике для країн третього світу. У роботі Коротаєва А.В., Малкова А.С. і Халтуріної Д.А. [2] проведено емпіричне обґрунтування технологічного підходу до опису гіперболічного зростання населення Землі. Автори запропонували враховувати вплив ВВП і грамотності на чисельність населення. Демографічна модель являє собою систему диференціальних рівнянь (1), яка є, на наш погляд, однією з найбільш правдоподібних демографічних моделей, що зумовило її вибір в цій роботі.

Формулювання цілей статті. У відповідність з рекомендаціями авторів демографічної моделі (1) параметри $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ приймалися рівними 1, в результаті чого система представлялась у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aNS(1-L); \\ \frac{dS}{dt} = bNS; \\ \frac{dL}{dt} = cNS(1-L) \end{cases} \quad (6)$$

з невідомими коефіцієнтами a, b, c .

Для ідентифікації параметрів демографічної моделі (6) введемо інтеграл

$$W(a,b,c) = \sum_i \left(\frac{(N^{\sim}(t_i) - N_i)^2}{(\max_i N_i)^2} + \frac{(S^{\sim}(t_i) - S_i)^2}{(\max_i S_i)^2} + \frac{(L^{\sim}(t_i) - L_i)^2}{(\max_i L_i)^2} \right) \quad (7)$$

де N_i, S_i, L_i - відомі статистичні дані про чисельність населення, надлишковим ВПП в розрахунку на душу населення і відносної грамотності населення Землі у деякі моменти часу t_i , $N^{\sim}(t_i), S^{\sim}(t_i), L^{\sim}(t_i)$ - відповідні значення, отримані розрахунковим шляхом.

Було потрібно визначити такі значення параметрів a, b, c , які доставляють критерію (7) мінімальне значення. Мова, власне, йде про знаходження глобального мінімуму функції $W(a, b, c)$.

Метод визначення параметрів в системі рівнянь (1). Відомі нам статистичні дані про $N_{ст}, S_{ст}, L_{ст}$ [2] представлені в табл. 1.

Таблиця 1.

Демографічні дані для розроблювальної моделі.

Рік	Чисельність млрд.	Надлишковий матеріальний ресурс, тис. \$	Рівень грамотності
0	0.17	0.01747	0.052
1000	0.28	0.064	0.068
1200	0.384	0.089	0.076
1500	0.427	0.165	0.1
1750	0.731	0.4	0.16
1900	1.668	1.12	0.292
1950	2.527	2.29	0.44
1960	3.060	2.8	0.491
1970	3.727	3.5	0.555
1980	4.43	4.65	0.634
1990	5.294	4.88	0.73
1992	5.478	5.25	0.75
1994	5.630	5.48	0.77
2000	6.091	6	0.84
2010	6.890	6.8	0.87

З метою приведення незалежних змінних моделі до одного порядку здійснювалась заміна: $N = 10^9 N_1, S = 10^3 S_1, L = L_1$. Пошук мінімуму проводився методом перебору шляхом послідовного стиснення інтервалів по кожному параметру. Початкові інтервали значень параметрів: $a \in [0; 0.1]$, $b \in [0; 0.1]$, $c \in [0; 0.1]$. Початкові значення демографічних величин $N(0)=0.17$, $S(0)=0.01747$, $T(0)=0.052$. При переборі кожен інтервал був розділений на 25 частин. Процес пошуку мінімуму критерія приведено в табл. 2.

Таблиця 2.

Процес пошуку мінімуму суми квадратів невязок (Crit)= $W(a,b,c)$.

a [min;max]	b [min;max]	c [min;max]	a_{opt}	b_{opt}	c_{opt}	Crit, $W(a,b,c)$
[0;0.1]	[0;0.1]	[0;0.1]	0.024	0.004	0.024	4.17
[0;0.05]	[0;0.05]	[0;0.05]	0.012	0.006	0.01	2.85
[0;0.025]	[0;0.025]	[0;0.025]	0.017	0.005	0.015	1.67
[0;0.025]	[0;0.0125]	[0;0.025]	0.011	0.00665	0.01	0.99
[0.006;0.0125]	[0.06;0.012]	[0.006;0.0125]	0.0115	0.00624	0.009	0.571
[0.006;0.0125]	[0.06;0.009]	[0.006;0.0125]	0.0115	0.00624	0.009	0.571
[0.006;0.0125]	[0.06;0.075]	[0.006;0.0125]	0.0115	0.00624	0.009	0.571
[0.0075;0.012]	[0.06;0.0675]	[0.0075;0.012]	0.012	0.00609	0.0093	0.616
[0.01;0.0135]	[0.06;0.0063]	[0.0075;0.01]	0.01238	0.006	0.0097	0.469
[0.01;0.013]	[0.0585;0.00615]	[0.008;0.01]	0.01288	0.005862	0.01	0.501
[0.012;0.013]	[0.058;0.0059]	[0.0096;0.0102]	0.013	0.005828	0.01008	0.5

Для виконання розрахунків створена програма в оболонці Delphi 7. Інтерфейс головної форми програми представлено на рис. 2.

The screenshot shows the main interface of the program. It is divided into two main sections: 'Початкові умови' (Initial conditions) and 'Границі зміни параметрів' (Parameter change limits). In the 'Початкові умови' section, there are input fields for 'n0' (0,17), 's0' (0,01747), and 'l0' (0,052). The 'Границі зміни параметрів' section has a table for parameters 'a', 'b', and 'c', each with 'min' and 'max' values and a 'кількість відрізків розбиття' (number of segments) dropdown. For 'a', min is 0,007 and max is 0,01 with 5 segments. For 'b', min is 0,005 and max is 0,007 with 25 segments. For 'c', min is 0,007 and max is 0,01 with 5 segments. There is also a 'Прогноз за моделлю до' (Forecast by model until) dropdown set to '2020' року (year). On the right, a 'Протокол обчислень' (Calculation log) window displays a list of calculation results with columns for 'a', 'b', 'c', and 'Criteriy' values.

Рис. 2. Інтерфейс головної форми програми.

Вікно містить поля вводу початкових умов, обмежень внизу та вверху на кожен параметр, числа розбиття відрізків. Вивід текстової інформації проводиться у вікні «Протокол обчислень». В силу того, що процес обчислень часто є розбіжним (рішення не обмежена в області обчислень) і такі точки утворюють в просторі параметрів безліч складної невизначеною конфігурації, в якості методу оптимізації параметрів був обраний простий перебір. У програмі реалізований також виведення графічної інформації, для цього служить відповідна форма (рис.3).

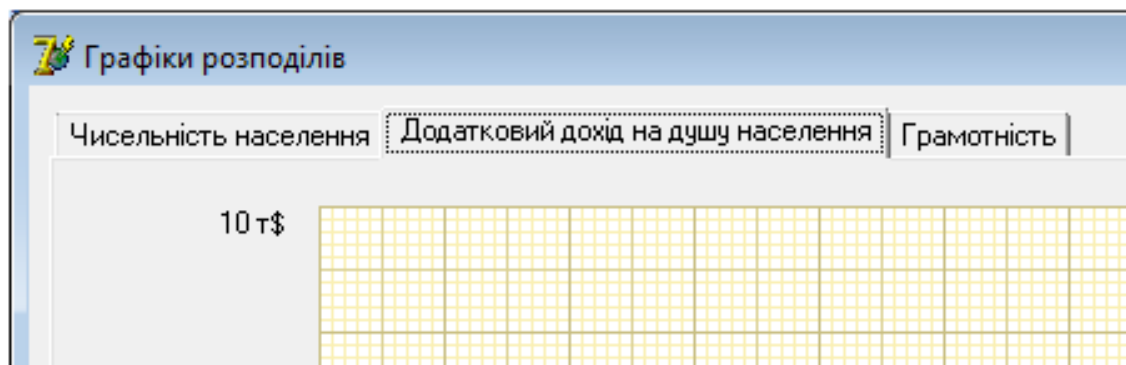


Рис. 3. Форма графічного виводу.

Ця форма містить три вкладки: «Чисельність населення», «додатковий дохід на душу населення», «Грамотність», які дозволяють відобразити відповідні графіки.

Графіки компонент наближеного розв'язання, обчислених при $a=0.013$, $b=0.005828$, $c=0.0108$ приведено на рис.4-6.

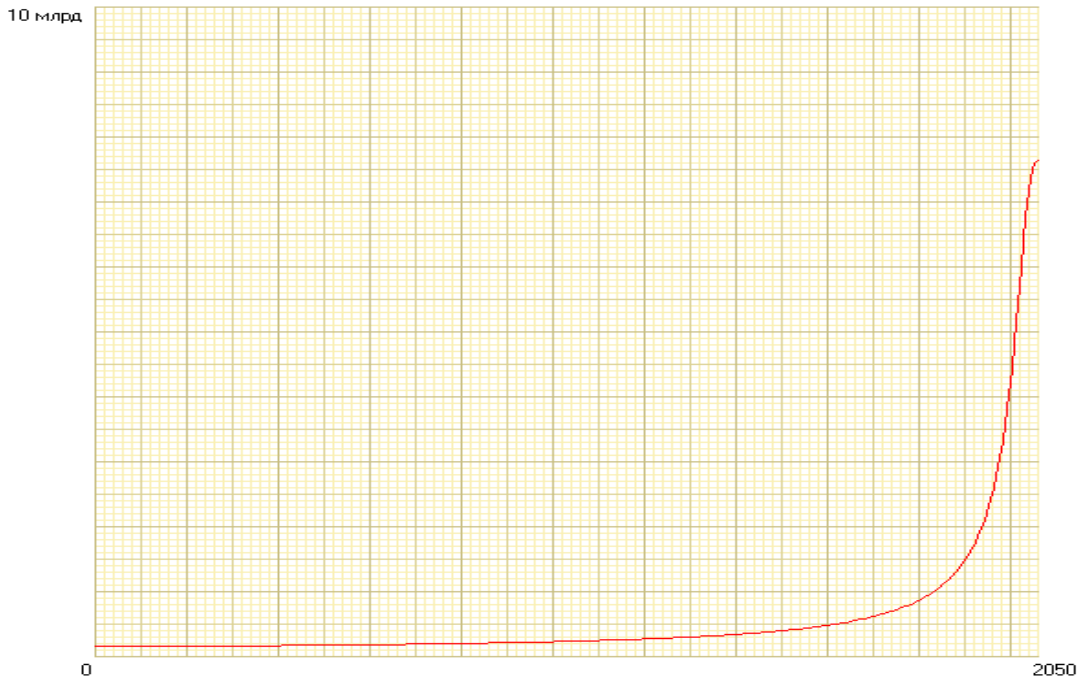


Рис. 4. Графік розрахованої чисельності населення.

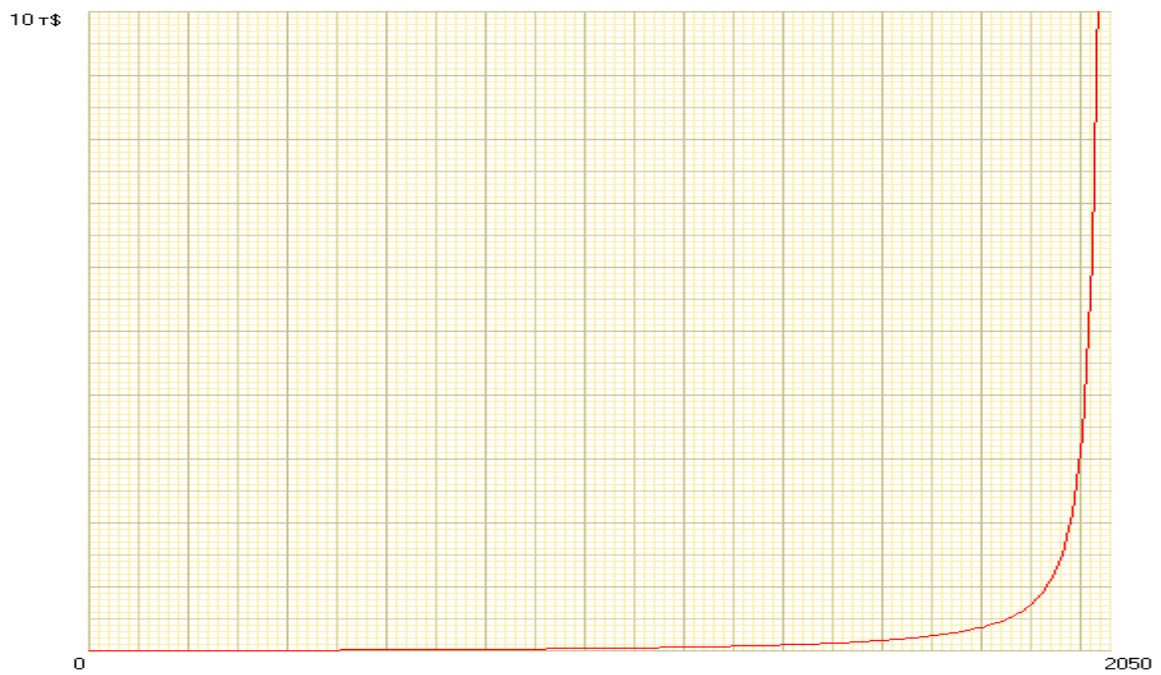


Рис. 5. Графік розрахованого середнього річного надлишкового доходу на душу населення.

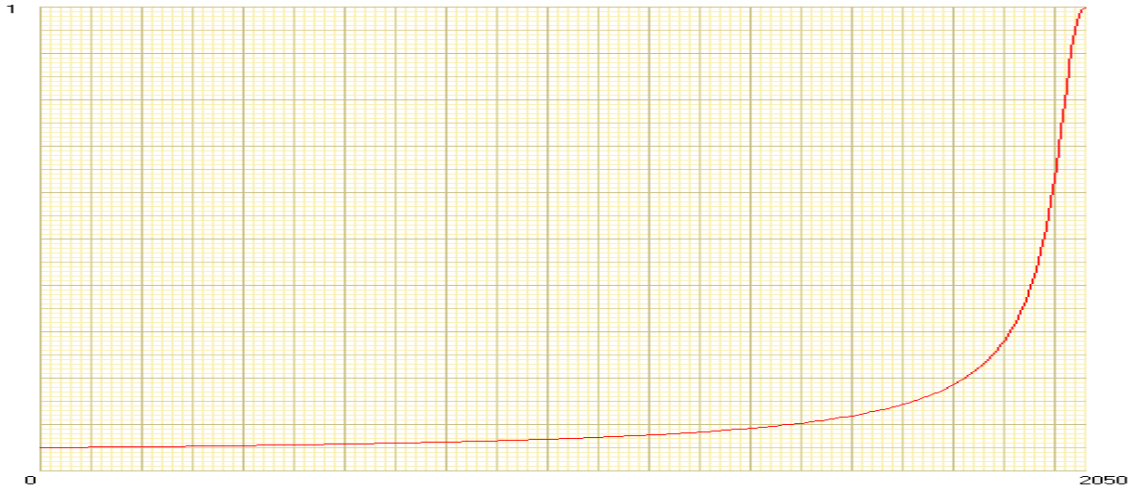


Рис. 6. Графік розрахованої грамотності населення.

Отримані дані, а також аналіз характеру демографічних процесів останніх десятиліть дозволяє зробити прогнозну оцінку основних тенденцій розвитку техносфери, демографічної ситуації в світі і грамотності населення найближчим часом. В основі прогнозу неявно лежить припущення про збереження закономірності розвитку людства.

Чисельність населення, надмірна валовий продукт і грамотність в найближчі 10-20 років будуть зростати. До 2050 р. грамотність досягне 90-100%.

Представляється цікавим простежити за зміною вікової структури населення. Не виключено, що підвищення тривалості життя людини може привести до уповільнення як зростання чисельності населення, так і валової продукції.

Висновки. Динаміка чисельності населення залежить від комплексу демографічних чинників, таких як економічні фактори і грамотність населення. Отримані дані дозволяють прогнозувати збільшення валового продукту, зміна чисельності населення Землі і рівень його грамотності. Являється цікавим уточнити всі 11 параметрів у загальній демографічній моделі (1), що забезпечить можливість одержання більш точного прогнозу зміни чисельності населення Землі. Вирішення завдання зазначеним методом зустрічається з великими труднощами. У цьому випадку рекомендується використовувати метод, який заснований на теорії повного факторного експерименту [7].

Література

1. *Асмус Т.А.* Демография (конспект лекцій) / Т.А. Асмус, А.В. Коваленко - Томск: ТПУ, 2000. – 53 с.
2. *Коротаев А.В.* Законы истории. Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура. /

- А.В.Коротаев, А.С.Малков, Д.А.Халтурина – УРСС, 2007. – 224с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.keldysh.ru/papers/2005/prep13/prep2005_13.html.
3. Методы и модели демографического прогнозирования. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.bestreferat.ru/referat-56223.html>.
 4. *Ватник А.П.* Математические модели в демографии/А.П. Ватник – Санкт-Петербург, 2008 – 322с.
 5. *Капица С.П.* Общая теория роста населения Земли/ С.П. Капица - Москва: Наука, 1999. – 136с.
 6. *Подлазов А.В.* Основное уравнение теоретической демографии и модель глобального демографического перехода. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №88. 2001.
 7. *Єремєєв В. С.* Ідентифікація параметрів геометричних моделей методами теорії планування експериментів. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Applide Geometry and Graphics. The Interdepartmental Collection of Proceedings. Issue № 90. Kyiv: ПАТ «ВІПОЛ», 2012. Р. 107-112.

МОДЕЛРОВАНИЕ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ КОРОТАЕВА, МАЛКОВА, ХАЛТУРИНОЙ

В.С. Еремеев, В.В. Кузьминов

Аннотация – в работе рассматривается проблема динамики основного демографического показателя, обосновывается выбор математической модели, учитывающей влияние грамотности и экономического развития общества на численность населения Земли, описывается компьютерная реализация модели и приводятся результаты вычислений.

PREDICTION OF THE DEMOGRAPHIC PROCESSES ON THE EARTH USING THE EQUATIONS KOROTAYEV, MALKOV AND HALTURINA

V. .Eremeev, V. Kuzminov

Summary

The article deals with the problem of studying the dynamics of basic demographic parameters, justified the choice of a mathematical model that takes into account the impact of literacy and economic development of society by the population of the Earth, described computer implementation of the model and the results of calculations.