

УДК 514.18

ГЕОДЕЗИЧНІ ЛІНІЇ НА ТОРІ ТА ЇХ ОСОБЛИВОСТІ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,

Кремець Я.С., аспірант *

*Національний університет біоресурсів і природокористування
України (Київ)*

Тел. (044) 527-82-26

Анотація – геодезичні лінії на торі побудовані з допомогою диференціальних рівнянь, що їх описують. Інтегрування диференціальних рівнянь здійснювалося чисельними методами. Досліджено особливості геодезичних ліній, їх форму та розташування, знайдено замкнені геодезичні криві.

Ключові слова – геодезичні лінії, поверхня обертання, тор, теорема Клеро, диференціальне рівняння, чисельні методи.

Постановка проблеми. Форму геодезичної лінії на поверхні можна досліджувати за окремими характерними точками, аналізуючи в цілому диференціальне рівняння і його поведінку в цих точках. Так, в основному, і велися дослідження до появи комп'ютерних засобів та прикладних програм чисельного інтегрування диференціальних рівнянь. Наприклад, геодезична лінія на зовнішній стороні тора в збірнику задач для вишів [1] побудована не зовсім точно, хоча її розташування між двома симетричними паралелями знайдено правильно. Крім того, не показані геодезичні лінії, що відповідають гвинтовим на поверхні циліндра, якщо порівняти циліндр із частиною тора з великим радіусом його осі. В наш час з'явилася можливість досить точної побудови геодезичних ліній на поверхнях.

Аналіз останніх досліджень. Якщо поверхні обертання виготовляти із композитних матеріалів, армованих нитками, то нитки необхідно намотувати саме по геодезичних лініях, оскільки в таких випадках не виникатиме зусиль, які намагаються змістити нитки із свого початкового положення. Знаходження геодезичних ліній на поверхнях було темою досліджень різних авторів [2, 3]. Крім того, при проектуванні деяких робочих органів (зокрема, ґрунтообробних), враховують розташування геодезичних ліній на їх поверхні, оскільки частинки технологічного матеріалу при примусовому їх русі по робочому органу намагаються рухатися саме по лініях, близьких до геодезичних, особливо при високих швидкостях переміщення [4].

* Науковий керівник: д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

Формулювання цілей статті. Дослідити форму геодезичних ліній на торі за допомогою чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь та комп'ютерних методів побудови.

Основна частина. Якщо поверхня обертання задана параметричними рівняннями у формі:

$$X = \varphi \cos v; \quad Y = \varphi \sin v; \quad Z = \psi, \quad (1)$$

де $\varphi = \varphi(u)$; $\psi = \psi(u)$ – параметричні рівняння меридіана, то згідно теореми Клеро внутрішнє рівняння геодезичної лінії у формі $v = v(u)$ описується інтегралом:

$$v = c \int \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi \sqrt{\varphi^2 - c^2}} du, \quad (2)$$

де c – стала, від якої залежить напрям геодезичної лінії в конкретній точці при заданих значеннях внутрішніх координат u і v .

У праці [5] виведено диференціальне рівняння другого порядку геодезичних ліній на поверхні обертання (1). Воно має вигляд:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\varphi(\varphi'_u \varphi''_u + \psi'_u \psi''_u) - 2\varphi'_u(\varphi'^2_u + \psi'^2_u)}{\varphi(\varphi'^2_u + \psi'^2_u)} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{\varphi \varphi'_u}{\varphi'^2_u + \psi'^2_u} = 0. \quad (3)$$

Застосуємо рівняння (3) для знаходження геодезичних ліній на поверхні тора. Його меридіан описується параметричними рівняннями:

$$\varphi = R + r \cos u; \quad \psi = r \sin u, \quad (4)$$

де R – радіус напрямного кола – осі тора;

r – радіус твірного кола (меридіана поверхні).

Знайдемо перші і другі частинні похідні тора, що по суті є похідними рівнянь меридіана (4):

$$\begin{aligned} \varphi'_u &= -r \sin u; & \psi'_u &= r \cos u; \\ \varphi''_u &= -r \cos u; & \psi''_u &= -r \sin u. \end{aligned} \quad (5)$$

Підстановка (5) у (3) дає диференціальне рівняння, яке зв'язує дві незалежні змінні поверхні у вигляді $u = u(v)$:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{2r \sin u}{R + r \cos u} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{(R + r \cos u) \sin u}{r} = 0. \quad (6)$$

Після чисельного інтегрування диференціального рівняння (6) було отримано залежність $u = u(v)$, що дало можливість знаходити геодезичні лінії на торі шляхом підстановки цієї залежності у рівняння меридіану (4) і подальшої підстановки меридіану у рівняння поверхні (1).

За результатами обчислень було побудовано геодезичні лінії на торі та з'ясовано особливості їх форми. На рис. 1,а наведено приклад із збірника задач [1], на якому зображено тор із нанесеною на нього

геодезичною лінією, подібною до синусоїди. Якщо порівняти цю лінію із одержаними кривими внаслідок чисельного інтегрування (рис. 1,б), то можна побачити не тільки певну схожість, а і суттєву відмінність. Спільним є те, що криві розташовані між двома симетричними паралелями. Відмінність полягає в тому, що розтяжна нитка (наприклад, гумова), не буде зісковзувати із поверхні, будучи натягнутою так, як показано на рис. 1,б, а на рис. 1,а вона зісковзне із свого початкового положення. Це і є підтвердженням того, що геодезична лінія на рис. 1,а зображена не зовсім точно.

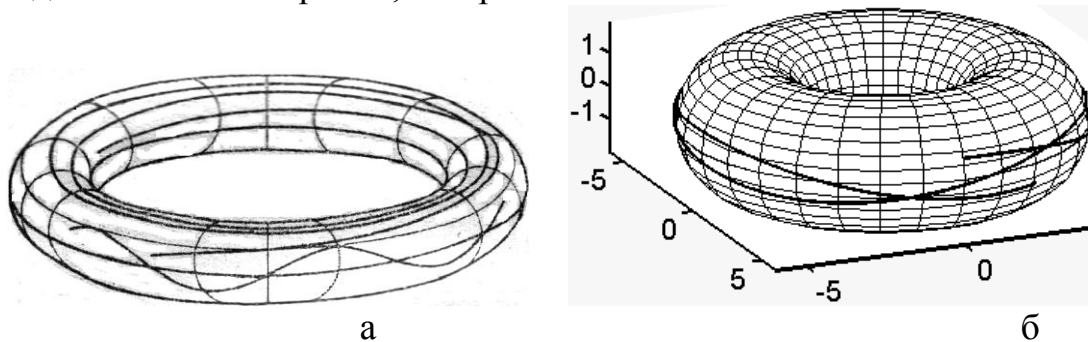


Рис. 1. Геодезичні лінії на поверхні тора:

- а) приклад із збірника задач [1];
 б) криві, отримані внаслідок чисельного інтегрування рівняння (2).

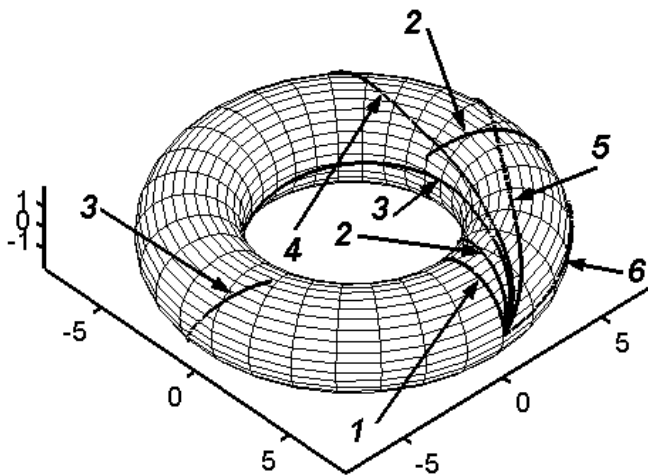


Рис. 2. Форма геодезичної лінії тора в залежності від напрямку в початковій точці інтегрування.

Якщо взяти точку на торі (ми взяли на найбільшій паралелі тора, рис. 2), то форму геодезичної лінії можна отримати, задаючи початковий напрям в ній. Якщо він складає 90° із паралеллю, то геодезичною лінією буде меридіан 1. Зменшуючи значення кута, ми отримаємо послідовно геодезичні лінії типу гвинтових 2, 3, які

обвивають тор, тобто перетинають всі паралелі, а потім – геодезичні між симетричними паралелями 4, 5 і нарешті саму паралель 6 при 0° .

Вибираючи відповідні початкові умови інтегрування можна побудувати геодезичні лінії між двома симетричними паралелями будь-якої ширини. На рис. 3,а та 3,б геодезичні лінії є замкненими і побудовані між верхньою і нижньою паралелями, які є асимптотичними лініями. Їх побудова здійснювалася за наступними

початковими умовами: початкову точку брали на верхній паралелі (асимптотичній лінії) і напрям задавали по дотичній до цієї лінії. Кількість витків і їх замкненість або не замкненість визначалося співвідношенням радіусів R і r .

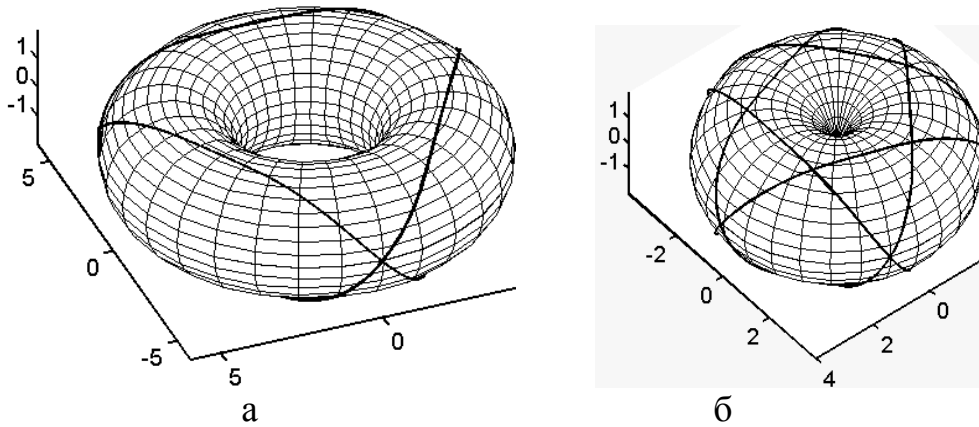


Рис. 3. Замкнені геодезичні лінії на поверхні тора із співвідношеннями радіусів напрямного і твірного кіл:
а) $R/r=4/2$; б) $R/r=2/2$.

Поверхню тора умовно можна розділити на дві частини: внутрішню і зовнішню, причому межею цих частин є верхня і нижня паралелі (і асимптотичні лінії одночасно). Геодезичні замкнені лінії, що торкаються асимптотичних і розташовані на зовнішній частині, показано на рис. 3. На вигляді зверху вони нагадують трикутник (рис. 4,а), два трикутники (рис. 4,б). Характерним для цих геодезичних є те, що верхня і нижня лінії збігаються. Однак при належному підборі співвідношення радіусів R і r можна отримати геодезичну криву, подібну до чотирикутника на вигляді зверху, проте збігання віток кривої не буде (рис. 4,в).

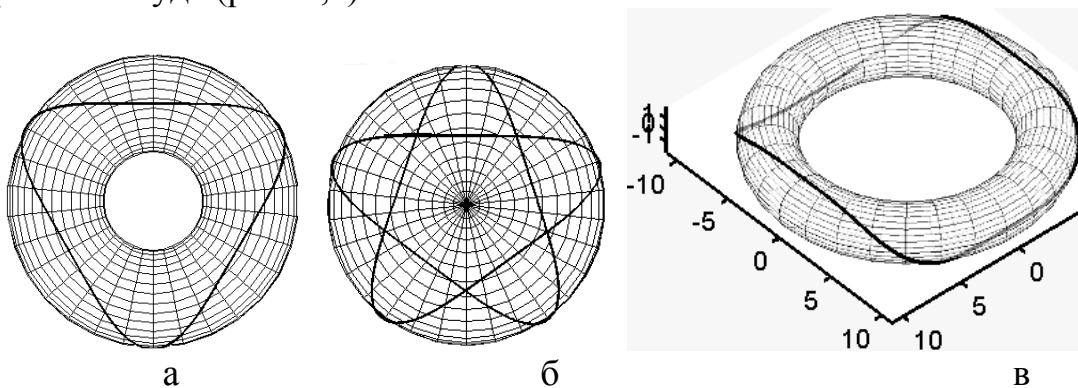


Рис. 4. Замкнені геодезичні лінії на поверхні тора із співвідношеннями радіусів напрямного і твірного кіл:
а) $R/r=4/2$; б) $R/r=2/2$; в) $R/r=9/2$.

Геодезичні лінії, що обвивають тор подібно гвинтовим на циліндрі, показано на рис. 5.

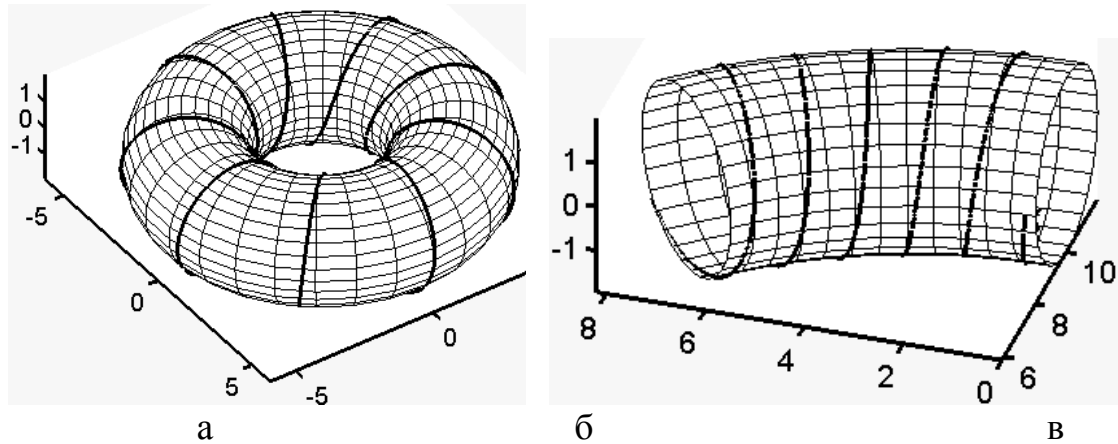


Рис. 5. Геодезичні лінії, що обвивають тор:

- а) крива замкнена;
- б) фрагмент тора, близького до циліндра.

Якщо радіус напрямного кола (осі тора) прямує в нескінченність, то тор прямує до циліндра і геодезична лінія на ньому наближається до гвинтової (рис.5,б).

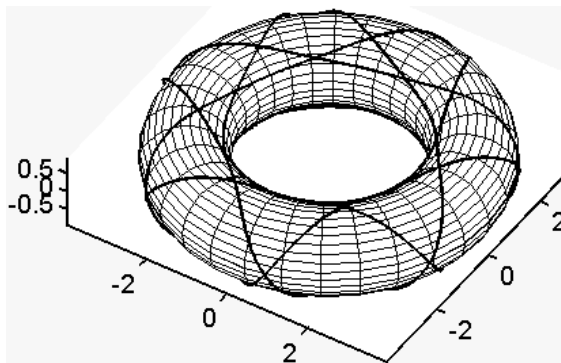


Рис. 5. Геодезична лінія, яка торкається до симетричних паралелей на внутрішній стороні тора.

Якщо брати початкову точку інтегрування на внутрішній стороні тора з напрямом, щоб геодезична була дотична до паралелі, то крива буде розташована в обох частинах тора (наприклад, крива 4 на рис. 2). В залежності від вибору точки вона як завгодно близько може проходити біля найменшої паралелі, не перетинаючи її. Якщо ж точку вибрати на найменшій паралелі, тоді геодезичною лінією буде ця

паралель. На рис. 5 побудована замкнена геодезична лінія, яка теж знаходиться між двома симетричними внутрішніми паралелями і торкається до них з обох сторін (вгорі і внизу). Щоб розтяжна нитка була натянута на тор вздовж такої геодезичної кривої, необхідно, щоб вона переходила із зовнішньої частини поверхні на внутрішню на асимптотичній лінії (верхній і нижній паралелях).

На рис. 6,а побудована замкнена геодезична лінія, яка теж знаходиться між двома симетричними внутрішніми паралелями і торкається до однієї з них вгорі, а до другої – з протилежної сторони

внизу. На цьому ж рисунку показана сама лінія в проекціях. При її моделюванні розтяжною ниткою остання теж повинна бути розташована своїми частинами на різних сторонах поверхні.

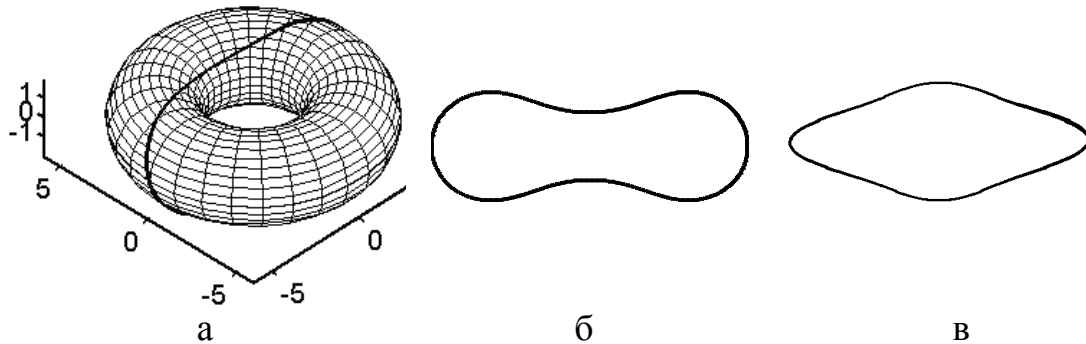


Рис. 6. Замкнена геодезична лінія, розташована між симетричними паралелями:

а) аксонометрія; б) вигляд спереду; в) вигляд зверху.

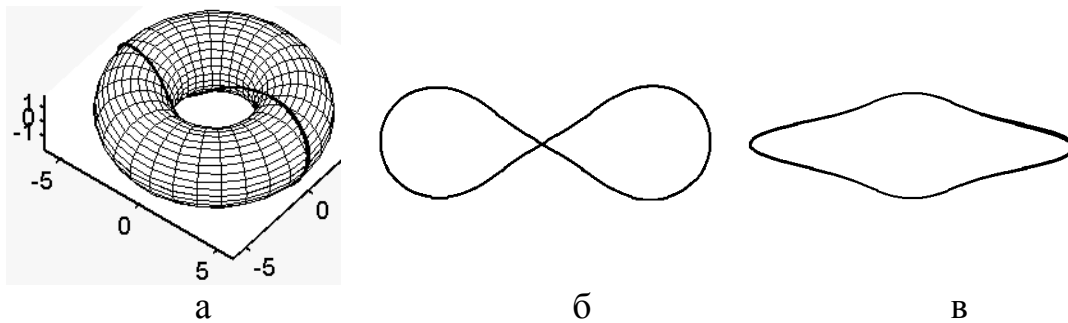


Рис. 6. Замкнена геодезична лінія, яка обвиває тор:

а) аксонометрія; б) вигляд спереду; в) вигляд зверху.

На рис. 7 зображена геодезична лінія, подібна до попередньої. Однак відмінність полягає в тому, що вона обвиває поверхню тора.

Висновки. Геодезичні лінії на торі побудовані із застосуванням методів чисельного інтегрування. Вони можуть бути розташовані між двома симетричними паралелями будь-якої ширини, а також обвивати тор подібно гвинтовій лінії на циліндрі. Геодезичні лінії можуть бути замкненими або незамкненими в залежності від співвідношення радіусів напрямного кола (осі тора) і твірного кола (меридіана поверхні). За відповідних початкових умов інтегрування геодезичні лінії можуть збігатися із меридіанами, а також із найменшою і найбільшою паралеллю, які лежать у площині симетрії тора.

Література

1. Сборник задач по дифференциальной геометрии / [И.В. Белько, В.И. Ведерников, В.Т. Воднев и др.]. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

2. *Пилипака С.Ф.* Дослідження геодезичних ліній на поверхні гвинтового коноїда / С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька // Сучасні проблеми геометричного моделювання. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. – Львів: Національний університет "Львівська політехніка", 2003. – С. 77 - 80.
3. *Пилипака С.Ф.* Теоретичний пошук рівнянь геодезичних ліній в кінцевому вигляді на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Я.С. Кременець // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Випуск 87 «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Київ: КНУБА, 2011. – С.302-308.
4. *Юрчук В.П.* Проектування поверхні роторного копача шляхом використання геодезичної лінії. / В.П. Юрчук, О.Г. Гетьман // Труды Таврической государственной агротехнической академии. Випуск 4 «Прикладна геометрія та інженерна графіка». - Т. 6 – Мелитополь: ТГАТА, 1999. – С. 85 – 88.
5. *Пилипака С.Ф.* Теоретичний пошук рівнянь геодезичних ліній в кінцевому вигляді на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Я.С. Кременець // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Випуск 87 «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Київ: КНУБА, 2011. – С.302-308.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ТОРЕ И ИХ ОСОБЕННОСТИ

С.Ф. Пилипака, Я.С. Кременець

Аннотация – геодезические линии на торе построены с помощью дифференциальных уравнений, которые их описывают. Интегрирование дифференциальных уравнений осуществлялось численными методами. Исследованы особенности геодезических линий, их форма и расположение, найдены замкнутые геодезические кривые.

GEODETIC LINES ON THE TORUS AND THEIR SINGULARITY

S. Pylypaka, Ya. Kremetz

Summary

Geodetic lines at a torus are built by means of differential equations which present them. Integration of differential equations was carried out by numerical methods. It is investigated singularities of geodetic lines, their form and a disposition, it is discovered the closed geodesic curves.