

УДК 514.18

ТРАЄКТОРНО-КІНЕМАТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ПОВЕРХНІ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ЦИЛІНДРА ДОВІЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,

Несвідомін А.В., аспірант*

Національний університет біоресурсів і природокористування України (Київ)

Тел. (044) 527-82-26

Анотація – наведено результати комп'ютерних досліджень траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки по поверхні гіперболічного циліндра довільного положення.

Ключові слова - рух частинки, поверхня, гіперболічний циліндр, траєкторія, швидкість, нормальна реакція.

Постановка проблеми. Для переміщення сипучого матеріалу, зокрема мінеральних добрив від бункера до дискового розсіювача, використовуються туконапрямники циліндричної форми [1]. Існує проблема у визначенні траєкторно-кінематичних властивостей руху частинок по шорстких циліндричних поверхнях із різними напрямними кривими для здійснення заданих технологічних операцій з сипучим матеріалом. Рішення цієї проблеми зводиться до розробки комп'ютерних моделей руху частинки по поверхнях складної форми, які дозволять в автоматичному режимі визначити траєкторно-кінематичні характеристики руху частинки по шорстких поверхнях різних форм і положень в просторі.

Аналіз останніх досліджень. В класичній праці [1] розкрито проблематику досліджень руху частинки по шорстких нерухомих поверхнях стосовно обґрунтування форм робочих органів. Використання супровідних тригранників для опису руху частинки по довільній поверхні наведено в праці [2].

Формулювання цілей статті. За допомогою розробленої комп'ютерної моделі руху частинки по поверхні гіперболічного циліндра в середовищі Maple дослідити траєкторно-кінематичні характеристики частинки в залежності наступних вихідних умов: 1) форми та положення поверхні; 2) початкової швидкості V_0 частинки; 3) кута α_0 напрямку її кидання; 4) положення $[u_0, v_0]$ частинки на початку її руху; 5) коефіцієнта зовнішнього тертя f .

* Науковий керівник: д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

Основна частина. Рух частинки по будь-якій поверхні суттєво залежить від її форми та положення в тривимірному просторі. Для гіперболічного циліндра (1) виокремимо наступні характерні його положення в системі декартових координат $Oxyz$ (рис.1):

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R} \begin{bmatrix} u \cos(\vartheta) - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + u^2} \sin(\vartheta), \\ u \cos(\xi) \sin(\vartheta) - v \sin(\xi) + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + u^2} \cos(\vartheta) \cos(\xi), \\ u \sin(\xi) \sin(\vartheta) + v \cos(\xi) + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + u^2} \cos(\vartheta) \sin(\xi) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де a, b – параметр форми напрямної гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ в площині Oxy з дійсною віссю $Oi \equiv Oy$; ϑ, ξ – кути повороту циліндра відповідно навколо осі Oy і Ox ; u, v – криволінійні координати поверхні.

Виокремимо наступні характерні положення (рис.1) прямолінійних твірних \mathbf{R}'_v та дійсної осі Oi напрямної гіперболи циліндра $\mathbf{R}(u, v)$ (1) відносно площин та осей системи декартових координат $Oxyz$: а) $\mathbf{R}'_v \perp Oxy, Oi \parallel Oy$; б) $\mathbf{R}'_v \perp Oxz, Oi \parallel Oz$; в) $\mathbf{R}'_v \perp Oxz, Oi \parallel -Oz$; г) $\mathbf{R}'_v \perp Oxz$; д) $\mathbf{R}'_v \parallel Oyz, Oi \not\perp Oz$; е) $\mathbf{R}'_v \parallel Oyz, Oi \not\perp Oxy$.

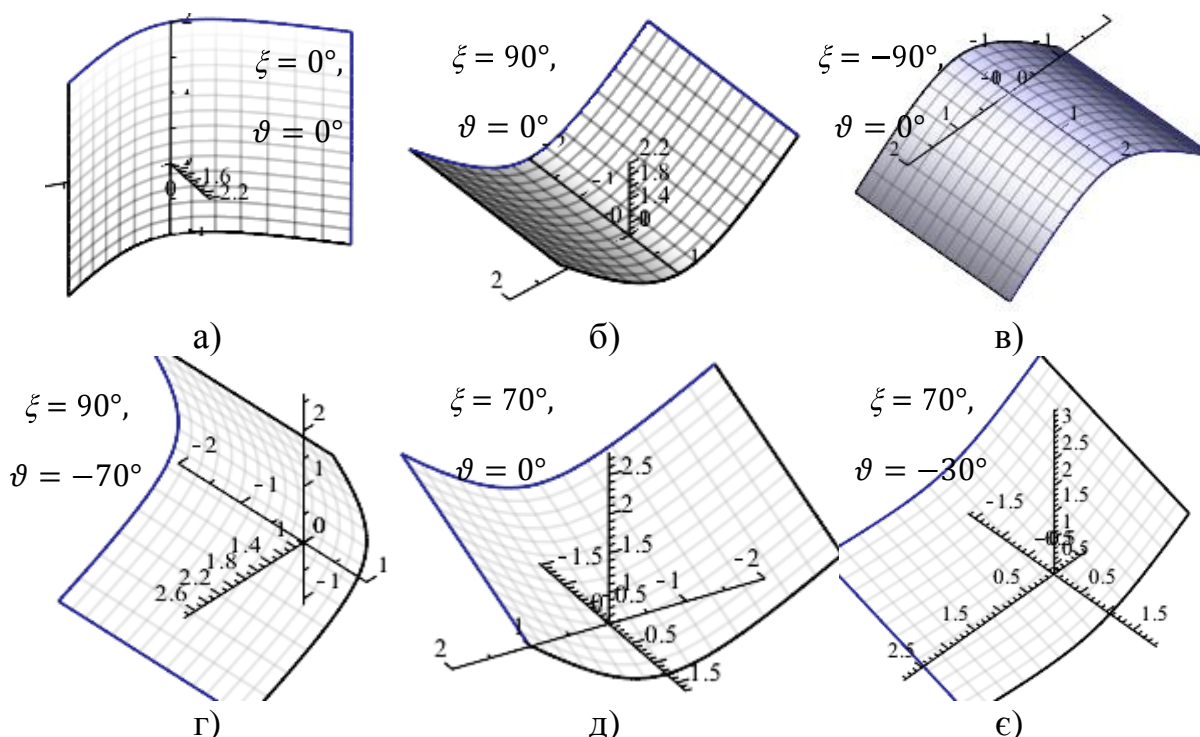


Рис.1. Характерні положення гіперболічного циліндра: а) вертикальне; б) горизонтальне випуклістю вниз; в) горизонтальне випуклістю ввверх; г) горизонтальне випуклістю вбік; д) похиле випуклістю вниз; е) загальне положення.

Розроблене авторами статті програмне забезпечення в середовищі Maple [3] дозволяє автоматично виконати складні аналітичні перетворення по формуванню закону руху частинки по

шорсткій поверхні гіперболічного циліндра для його довільного положення. Система диференціальних рівнянь 2-го порядку формується одночасно в проєкціях на осі двох супровідних тригранників - Дарбу $OTPN$ та $OuvN$. Їх вигляд є досить громіздким і тут вони не приводяться. Наведемо результати обчислювальних експериментів дослідження траєкторно-кінематичних характеристик руху частинки по поверхні гіперболічного циліндра для окремих його положень.

На рис.2 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ по поверхні горизонтального гіперболічного циліндра випуклістю вниз в залежності кута $\alpha_o = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ її кидання за вихідними умовами: $a = 1$, $b = 1$ - параметрами форми напрямної гіперболи; $V_o = 4$ м/с - початкової швидкості; $f = 0.3$ - коефіцієнта тертя; $u_o = -2$, $v_o = 0$ - початкового положення. Зрозуміло, що через певний проміжок часу t всі частинки зупиняться. З графіка швидкості $V(t)$ можна стверджувати, що найшвидше зупиниться частинка, у якій початковий напрям кидання $\alpha_o = 0^\circ$ направлений донизу перпендикулярно прямолінійній твірній. Сила нормальної реакції $F_N(t)$ для частинок які зупиняються, наближається до величини mg – сили тяжіння. Місце положення всіх частинок буде в околі найнижчої прямолінійної твірної.

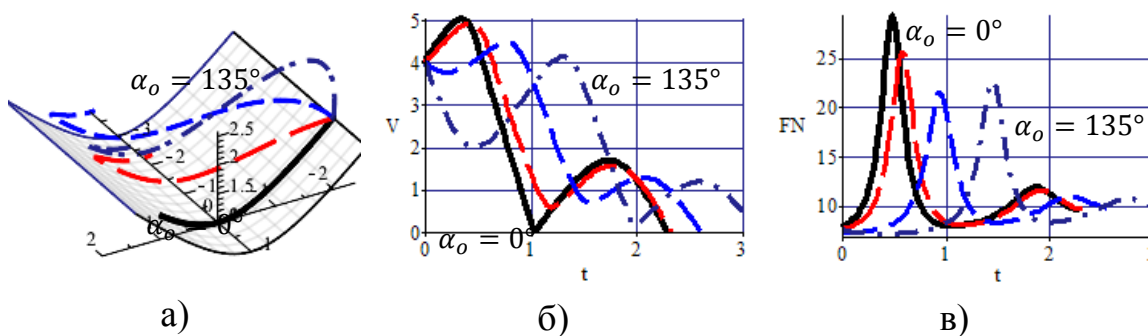


Рис.2. Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та сили $F_N(t)$ нормальної реакції для різних кутів α_o кидання частинки.

Якщо початкове положення частинки буде $u_o = -0.5$, $v_o = 0$, то на відміну від попереднього випадку, частинка кинута під кутом $\alpha_o = 0^\circ$ буде найдовше рухатися до повної її зупинки (рис.3,а). Зрозумілим є падіння до нуля швидкостей $V(t)$ частинок по шорсткій поверхні циліндра з параметрами форми напрямної гіперболи $a = 1$, $b = 0.25$ – коли тангенс кута нахилу асимптоти гіперболи менший коефіцієнта тертя $f = 0.3$ (рис.3,б). Якщо ж коефіцієнт тертя взяти $f = 0.15$, то при вище наведених вихідних умовах, всі частинки теж зупиняться в околі найнижчої прямолінійної твірної гіперболічного циліндра, але через більший термін часу (рис.3,в).

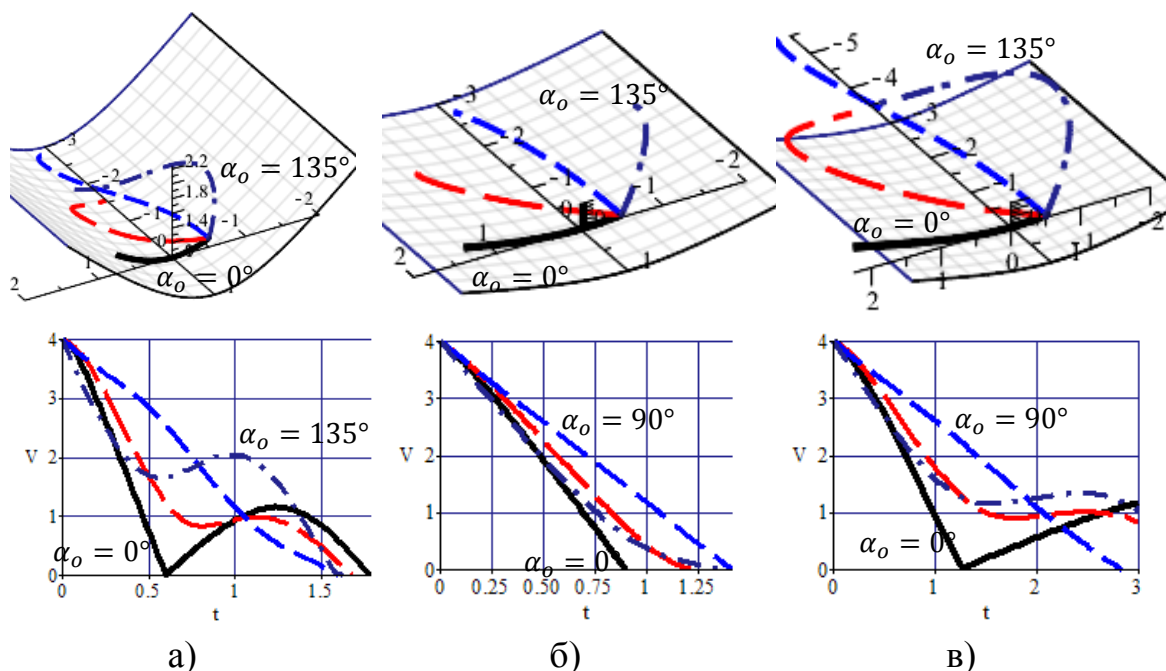


Рис.3. Траєкторії $\mathbf{r}(t)$ частинки та графіки її швидкості $V(t)$ для різних параметрів форми поверхні та коефіцієнта тертя.

Повернемо гіперболічний циліндр навколо осі Oy так, щоб асимптоти напрямної гіперболи збігалися з осями Ox і Oz декартової системи координат $Oxyz$. Візьмемо наступні вихідні умови: $a = 1$, $b = 1$ – параметри форми гіперболи; $V_o = 4$ м/с - початкова швидкість частинки; $f = 0.3$ – її коефіцієнт тертя та $u_o = -1$, $v_o = 0$ - початкове положення. На рис.4 побудовано траєкторії $\mathbf{r}(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ по поверхні в залежності кута $\alpha_o = 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ кидання частинки. Всі частинки не відриваючись від поверхні через певний проміжок часу зупиняться. Найшвидше зупиниться частинка, яка кинута вздовж прямолінійної твірної циліндра.

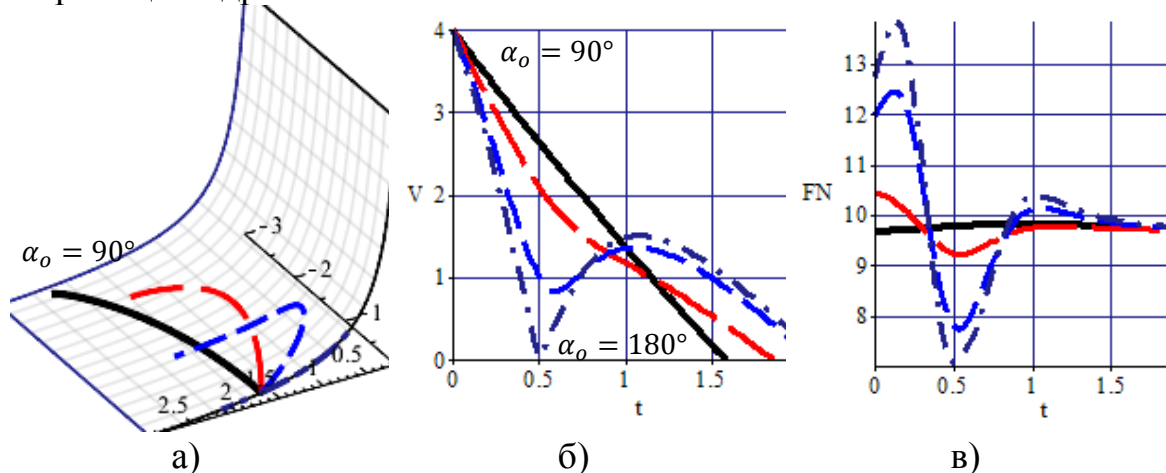


Рис.4. Траєкторії $\mathbf{r}(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та сили $F_N(t)$ нормальної реакції для різних кутів α_o кидання частинки.

На рис.5,а побудовані траєкторії $r(t)$ та графіки швидкості $V(t)$ частинки в залежності коефіцієнта тертя $f = 0.01, 0.15, 0.3, 0.45$ при куту кидання $\alpha_o = 150^\circ$ та початковому положенні $u_o = -1, v_o = 0$. Проміжки часу, через які частинки зупиняться, суттєво залежать від коефіцієнта тертя f . Якщо положення частинки взяти дещо нижче ($u_o = -2$), то проміжки часу до повної їх зупинки стануть меншими (рис.5,б). Чим більша початкова швидкість $V_o = 0.1, 4, 8, 12$ частинки, тим вище вона підніметься по поверхні гіперболічного циліндра при її киданні в сторону його ввігнутості. Наприклад, при заданому коефіцієнті тертя $f = 0.3$, початковому положенні $u_o = 0, v_o = 0$ і куту кидання $\alpha_o = 175^\circ$, частинка з початковою швидкістю $V_o = 0.1$ м/с майже відразу почне рухатися назад набираючи швидкість, а потім сповільнюючись зупиниться повністю (рис.5,г).

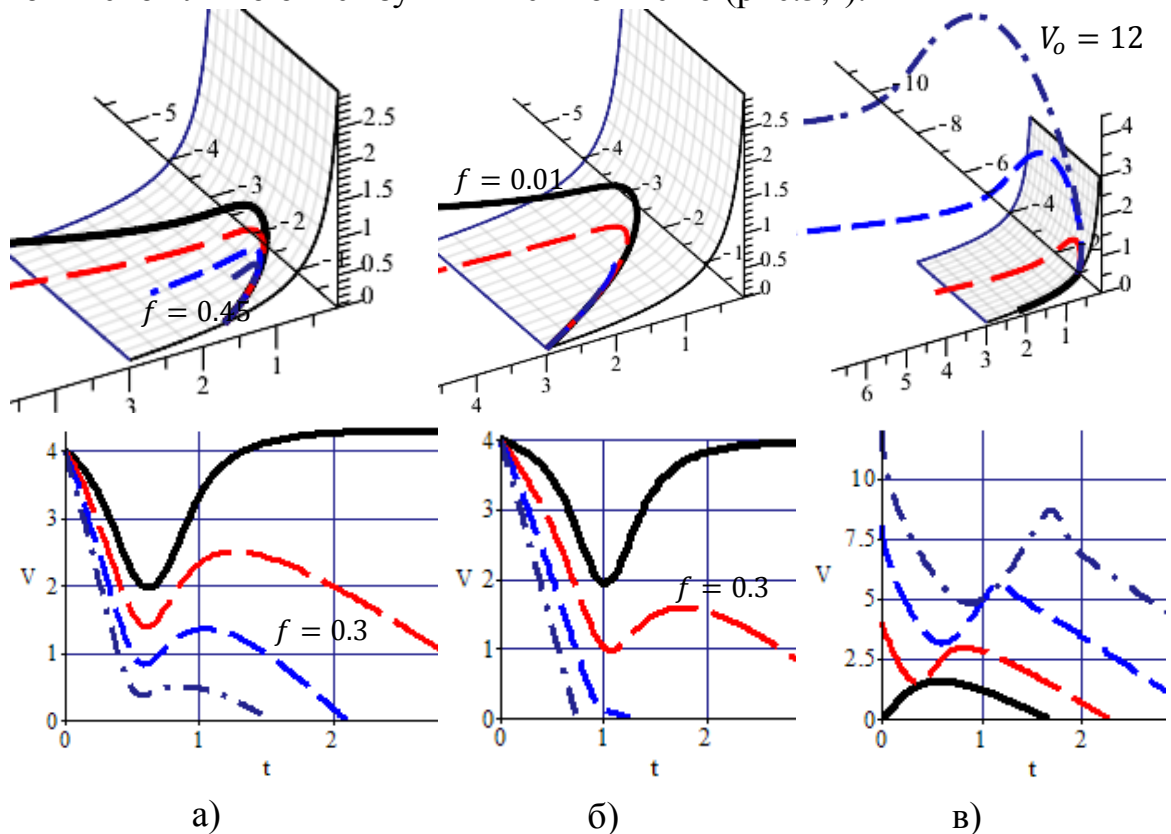


Рис.5. Траєкторії $r(t)$ частинки та графіки її швидкості $V(t)$ для різних параметрів форми поверхні та коефіцієнта тертя.

Нахилимо гіперболічний циліндр з горизонтальними твірними так, щоб кут нахилу асимптоти напрямної гіперболи циліндра збігався з кутом тертя. На рис.6 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ по такій поверхні гіперболічного циліндра в залежності кута $\alpha_o = 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ її кидання за вихідними умовами: $V_o = 4$ м/с; $f = 0.3$; $u_o = -2, v_o = 0$. Можна бачити, що при $t > 2$ с швидкість $V(t)$ частинок наближається

до постійної величини $V_t \approx 3 \text{ м/с} < V_o$. Оскільки друга асимптота напрямної гіперболи вже не збігається з вертикальною віссю Oz , то можливий відрив частинки від поверхні. Для цих вихідних умов, відрив частинки від внутрішньої поверхні гіперболічного циліндра не відбудеться – графік сили нормальної реакції $F_N(t)$ знаходиться вище осі абсцис.

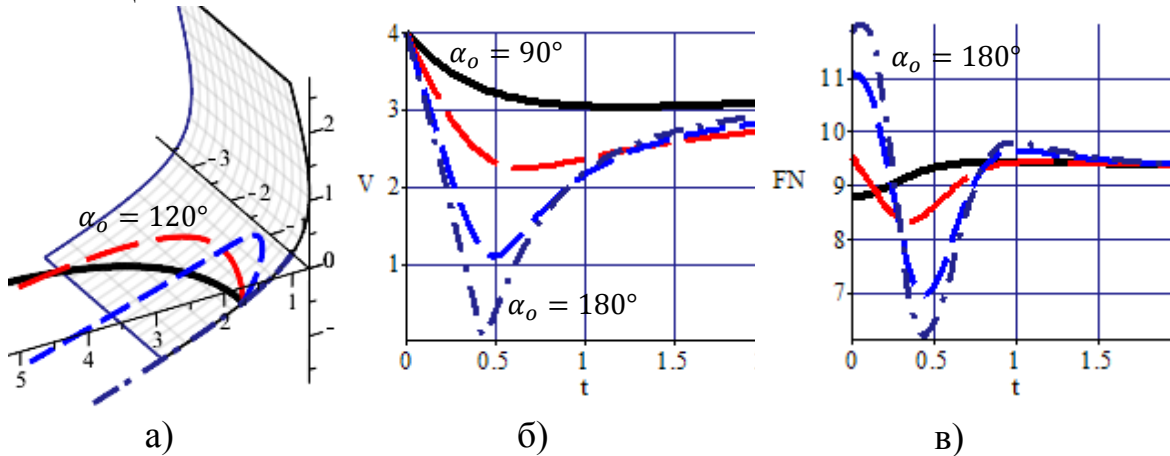


Рис.6. Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та сили $F_N(t)$ нормальної реакції для різних кутів α_o кидання частинки.

На рис.7 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ по зовнішній шорсткій поверхні горизонтального гіперболічного циліндра в залежності кута $\alpha_o = 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ за умови: $a = 1$, $b = 0.25$ – параметри форми гіперболи; $V_o = 4 \text{ м/с}$ - початкова швидкість частинки; $f = 0.3$ – її коефіцієнт тертя та $u_o = -1$, $v_o = 0$ - початкове положення. З графіка нормальної реакції $F_N(t)$ можна бачити, що частинки при цих умовах не відірвуться від поверхні. Тільки частинка кинута під кутом $\alpha_o = 120^\circ$ зупиниться на поверхні. При збільшенні початкової швидкості V_o , найперша відірветься частинка, яка кинута під кутом $\alpha_o = 180^\circ$.

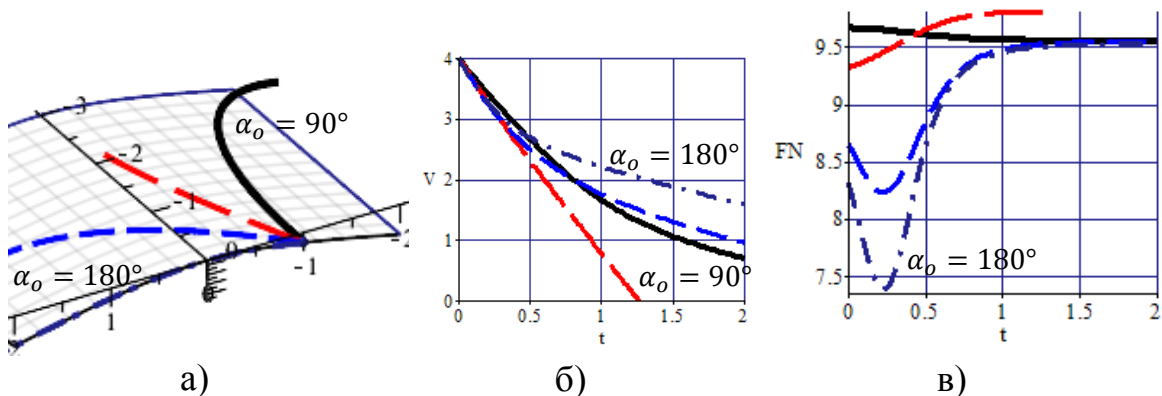


Рис.7. Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та сили $F_N(t)$ нормальної реакції для різних кутів α_o кидання частинки.

Висновки. Результати обчислювальних експериментів з аналізу руху частинок по шорсткій поверхні гіперболічного циліндра показують складний взаємовплив параметрів її положення та вихідних умов кидання. Зокрема, для гіперболічного циліндра з асимптотами прямої гіперболи які збігаються з осями координат частинка ніколи не відірветься від поверхні і з часом зупиниться на ній. Для поверхонь випуклістю вверх можлива ситуація, що для певних напрямів початкової швидкості частинка з часом зупиниться, а для іншого діапазону – продовжить рух.

Література

1. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М.Василенко. - К.: УАСХН, 1960. -283 с.
2. *Пилипака С.Ф.* Тригранник і формули Френе: теорія складного руху матеріальної точки та задачі на кінематику і динаміку при її русі по шорстких поверхнях / С.Ф.Пилипака // Академік П.М.Василенко – яскравий погляд у майбутнє. - К.: Хай-Тек Прес, 2010.- С.297-397.
3. *Аладьев В.З.* Программирование и разработка приложений в Maple / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба.- Гродно: ГрГУ, 2007.- 458 с.

ТРАЕКТОРНО-КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЧКИ ПО ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

С.Ф. Пилипака, А.В. Несвидомин

Аннотация – Представлены результаты компьютерных исследований траекторно-кинематических характеристик движения частички по шероховатой поверхности гиперболического цилиндра произвольного положения.

TRAJECTORY – KINEMATIC CHARACTERISTICS OF MOVEMENT OF THE PARTICLE ON ROUGHNESS SURFACES OF THE HYPERBOLIC CYLINDER OF ANY POSITION

S.Pylypaka, A.Nesvidomin

Summary

Results of computer researches of trajectory -kinematic characteristic of movement of a particle on a rough surface hyperbolic cylinder of any position have been given.