УДК 515.2

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ СГМ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІНВЕРСІЇ

Ковальов С.М., д.т.н.,
Ботвіновська С.І., к.т.н.*,
Золотова А.В., к.т.н.
Київський національний університет будівництва і архітектури (Україна)

Розглянуто спосіб геометричного моделювання дискретних каркасів поверхонь за допомогою просторового перетворення інверсії. Наведено приклад побудови дискретного каркасу поверхні із заданими властивостями на довільно заданому опорному контурі. Розроблено алгоритм моделювання архітектурних оболонок із збереженням композиційних властивостей, таких як округлість форми.

Ключеві слова: геометричне моделювання, перетворення інверсії, властивості поверхонь, дискретний каркас, статико-геометричний метод, формоутворення архітектурних оболонок.

Постановка проблеми. Для перекриття великих прогонів в будівельній практиці знайшли широке використання просторові конструкції. Використання різноманітних архітектурних оболонок архітектурних конструкцій значно підвищує економічну, естетичну та архітектурно-художню виразність як будівель, так і окремих приміщень в цілому. На сьогодні, актуальною проблемою прикладної геометрії залишається питання вдосконалення різноманітних методів формоутворення поверхонь складних форм із наперед заданими умовами та заданим опорним контуром.

Перенесення властивостей відомих поверхонь на поверхні, що моделюються, вимагає від апарату дискретної геометрії значної гнучкості, можливості використання простих методів та сучасних алгоритмів для розв’язання практичних задач із збереженням вихідних умов.

Дискретні точкові каркаси різноманітних криволінійних поверхонь знайшли широке використання у тих випадках, коли неможливо отримати аналітичне рівняння поверхні за наперед заданими умовами та на довільно заданому опорному контурі.

---

* Науковий консультант – д.т.н., професор Ковальов С.М.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі [1] був розглянутий спосіб формування дискретних каркасів поверхонь за заданими вихідними умовами у процесах дизайн-проектування та проектування криволінійних конструкцій в архітектурі. Наведено приклад формування дискретного каркасу поверхні за заданими параметрами, яка зберігає композиційні властивості поверхні прообразу.

Досконалість сферичної форми з давніх часів привертала увагу архітекторів та науковців, які намагалися пояснити гармонію всесвіту [2]. Із різних джерел відомо, що сферична поверхня має ряд переваг перед іншими поверхнями, які широко використовують у сучасній архітектурі. Насамперед, основною перевагою залишається природність форми. Із всіх об’єктів, що мають однакову площу поверхні, саме сфера обмежує максимальний об’єм. І, навпаки, сфера має найменшу площу поверхні, із всіх об’єктів, що обмежують один і той саме об’єм. Саме тому, тіла сферичної форми дуже часто зустрічаються у природі. Наприклад, крапля води у вільному падінні приймає сферичну форму за рахунок мінімізації площі поверхні під силою тяжіння Землі. Саме тому природність цієї форми приваблює сучасних архітекторів

Геометричні форми різноманітних об’єктів дизайну та архітектури є поєднанням простих геометричних форм з криволінійними поверхнями. У сучасній архітектурі стилю хай-тек дуже часто використовуються конструкції з криволінійними обрисами. Оригінальність кожного об’єкту досягається за рахунок спеціальних властивостей поверхні, що моделюється, геометрії її опорного контуру і різних додаткових умов закріплення несучих конструкцій, умов на контурі [3, 4].

В роботі [5] був описаний алгоритм конструювання поверхні, як образу площини або простої поверхні у нелінійних перетвореннях простору. При чому, були перераховані три основні переваги цього способу: «…во-первых, есть возможность исследования свойств конструируемой поверхности в целом (за счет взаимно однозначного соответствия между точками поверхности и их прообразами). Таким образом, имея аппарат преобразования и зная свойства прообраза, можно установить основные свойства конструируемого образа. Во-вторых, упрощается вычисление коэффициентов уравнения конструируемой поверхности, заданной рядом условий, поскольку некоторые из них участвуют в задании аппарата преобразования (а оставшаяся часть – в задании прообраза). В третьих, есть возможность управлять формой (поскольку свойства конструируемой поверхности обусловлены свойствами прообраза, аппарат преобразования и положение прообраза в аппарате преобразования, параметры которых доступны для управления…». Саме такий підхід був покладений в основу даної роботи. Робота присвячена просторовому перетворенню інверсії та її використанню при формоутворенні дискретних каркасів поверхонь із заданими властивостями.

Відомо, що змінюючи в рівнянні поверхні $F(x, y, z)=0$ змінні x, y, z за формулами перетворення: $x=f_1(x_1,y_1,z_1)$, $y=f_2(x_1,y_1,z_1)$, $z=f_3(x_1,y_1,z_1)$ можна встановити відповідність між точками даної поверхні прообразу та точками нової поверхні $\Phi(x_1, y_1, z_1)=0$, і, у такий спосіб, із однієї поверхні отримати іншу. Таким чином, із достатньо простої, добре вивченої поверхні, властивості якої відомі, за допомогою геометричних перетворень можна отримати дискретний каркас нової поверхні, яка буде зберігати властивості поверхні прообразу.

Формулювання цілей статті. Мета роботи – сформувати дискретний каркас поверхні округлої форми, на довільно заданому опорному контурі за допомогою перетворення інверсії в просторі.

Загально відомо, що інверсія – це особливий тип перетворення точок, на площині або в просторі. Практична цінність інверсії полягає у тому, що найчастіше таке перетворення дозволяє звести розв’язання геометричних задач з колами або із сферами до розв’язання відповідних задач з прямими або площинами, тобто до задач, які зазвичай мають набагато простіше рішення. Із [6] відомо, що функція перетворення інверсії є раціональною функцією 2-го порядку. Маючи апарат перетворення і взявши за прототип сферичну поверхню, необхідно змоделювати дискретний каркас поверхні на круглому плані. Опорний контур поверхні яка формується, задано на поверхні циліндра, що дотикається до однієї із сфер апарату інверсії і співвісного з цією сферою.

Основна частина. Як відомо [6], перетворення інверсії є окремим випадком квадратичного перетворення. У тривимірному просторі формули інверсії матимуть вигляд:

$$x=\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2+(z')^2},$$
$$y=\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2+(z')^2}, \qquad (1)$$
$$z=\frac{r^2z'}{(x')^2+(y')^2+(z')^2},$$

де r – радіус базової сфери $\boldsymbol{S}$ подвійних точок інверсії (рис.1).

Використаємо властивість інверсії, за якою будь-яка площина, що не проходить через центр інверсії переходить у сферу, що буде проходити через центр інверсії. Тоді, будь-якій площині $\boldsymbol{\Gamma}$, що перетинає базову сферу, відповідає сфера Γ_2', що проходить через центр O інверсії та коло перерізу базової сфери ***S*** площиною ***Г.*** Множина точок між двома січними площинами ***Г*** та ***D*** переходить у множину точок між сферами Γ'іΔ'. На рис.1 перерізи таких зон заштриховано.

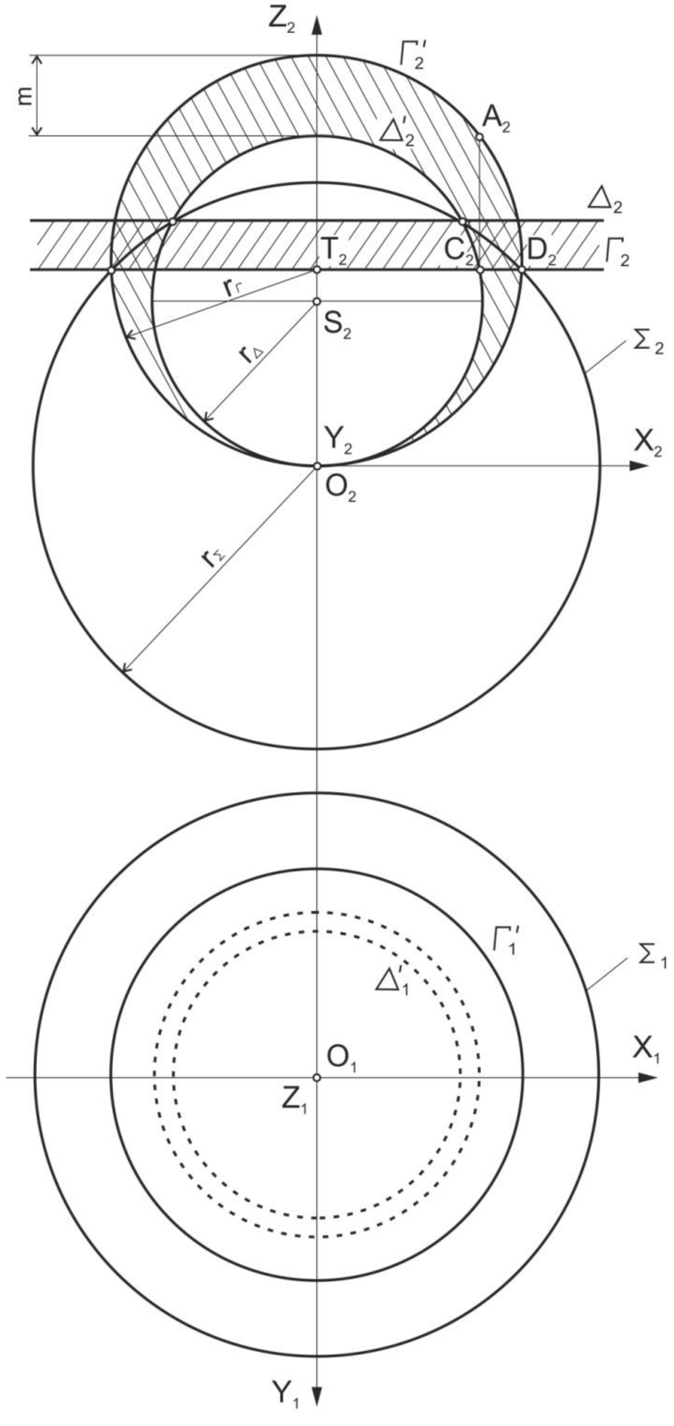

Рис. 1. Схема перетворення інверсії в двох проекціях

Якщо між площинами ***Г*** і ***D*** розмістити деяку обмежену поверхню, вона перейде у нову поверхню, всі точки якої будуть розміщені між сферами Γ' і Δ'. Із зменшенням відстані між площинами $\boldsymbol{\Gamma}$ і $\boldsymbol{D}$ форма перетвореної поверхні буде наближатись до сферичної, причому максимальна товщина (m) зони між сферами Γ' і Δ' становить:

$$m = \frac{r^2(z_\Delta - z_\Gamma)}{z_\Delta z_\Gamma}, \qquad (2)$$

де Z_Δ, Z_Γ – це висота найвіддаленіших від центра інверсії точок, що належать сферам Δ' *та* Γ' відповідно.

Чим меншою буде товщина зони (m), тим більше геометрична форма поверхні, яку моделюємо, буде наближатись до сфери.

Максимальна висота опорного контуру може бути забезпечена за рахунок призначення найвищої (*A*) і найнижчої (*C*) точок конура на границях зони між сферами Δ' *та* Γ'. Слід зауважити також, що поверхня, яка моделюється, буде не складеною. Особливі точки будуть залишатись лише на контурі.

Вихідні данні (вузли опорного контуру), що розміщені в зоні між сферами Δ'таΓ' за формулам (1) переводяться у шар між площинами $\boldsymbol{\Gamma}$ і $\boldsymbol{D}$, де за допомогою статико-геометричного методу (СГМ) дискретний каркас розтягнутої сітки без зовнішнього навантаження. Така поверхня буде аналогічна мильній плівці.

Після цього, за допомогою зворотного перетворення за формулами перетворення (3), які є повністю зворотними (1) отримаємо шукану поверхню з заданим опорним контуром

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, z' = \frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Отримана поверхня повинна наближатись до сфери.

Приклад 1. Задаємо сферу Δ', $r_\Delta = 6.00$ (рис.1). Висота найвищої точки контуру т. *A*, $h_A = 2.00$. За опорний контур, який розміщується в зоні (m) обираємо арку, складену із дуг парабол (рис.2), які нанесені на циліндричну поверхню (ω), що дотикається до сфери Δ' і є співвісної із сферою. Радіус основи циліндричної поверхні $r_\omega = r_\Delta$.

Такий контур обираємо для того, щоб отримати поверхню максимально наближену до криволінійної поверхні сфери. За центр інверсії приймаємо точку *O*. Будуємо апарат інверсії, так як описано вище.

Для цього, запишемо рівняння сфери Γ', що проходить через точку *A* та знайдемо її радіус:

$$r_\Gamma = \frac{r_\Delta{}^2 + (r_\Delta + h)}{2(r_\Delta + h)}, \tag{4}$$

де h – висота точки A; r_Δ – радіус заданої сфери Δ'.

За формулою (4) отримаємо $r_\Gamma = 6.25$. Наступним кроком знаходимо радіус базової сфери ***S***, яка проходить через точку D, на сфері Γ':

$$r_\Sigma = \pm\sqrt{2r_\Delta \cdot r_\Gamma}\,. \tag{5}$$

За формулою (5) отримаємо $r_\Sigma = 8.6603$.

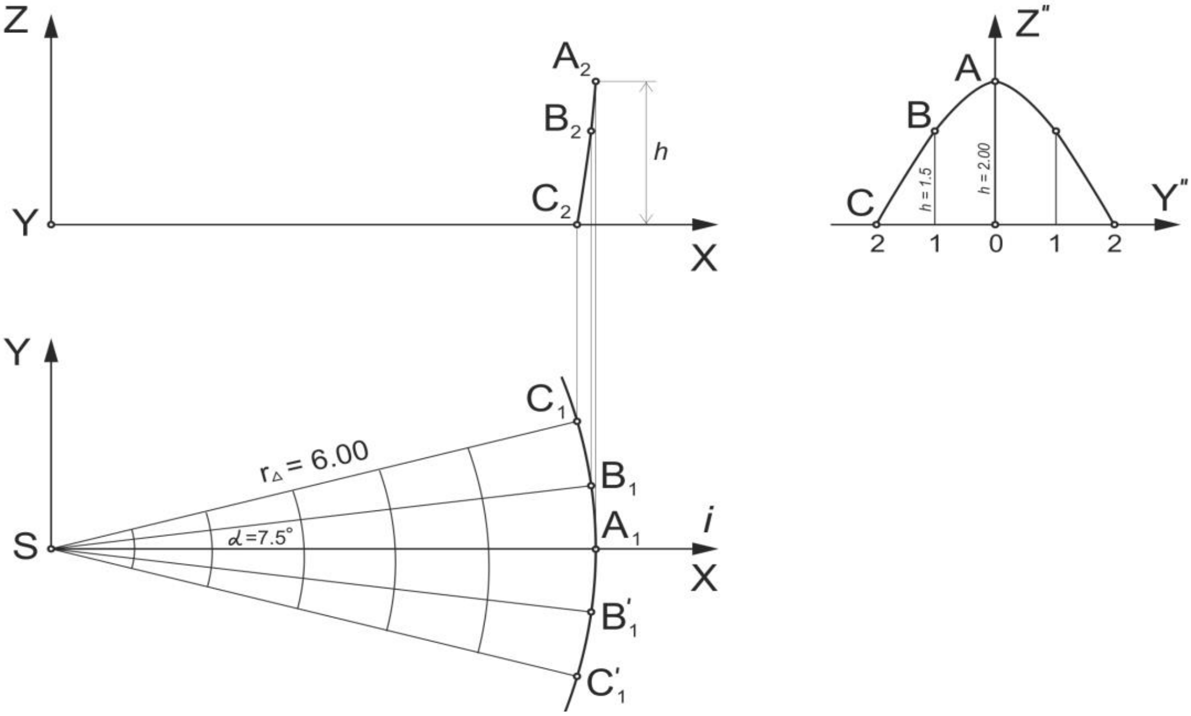

Рис.2. Схема завдання опорного контуру поверхні

Із рис.2 видно, що координати точки A (x_A=6.00; y_A=0.00;z_A=2.00) відомі, а координати точок B і C розраховуємо за формулами:

$$x_B = r_\Delta\, cos\alpha, y_B = r_\Delta\, sin\alpha, x_C = r_\Delta\, cos2\alpha, y_C = r_\Delta\, sin2\alpha\,. \tag{6}$$

За формулами (6) отримуємо: координати точки B(x_B=5.94; y_B=0.78;z_B=7.50), координати точки C(x_C=5.79; y_C=1.55;z_C=6.00).

За формулами (1) перетворення інверсії та радіусом базової сфери ***S*** ($r_\Sigma = 8.6603$) знаходимо координати точок-образів поверхні.

Дискретний каркас розтягнутої сітки буде знаходитись у шарі між площинами ***Г – D***. Для формування сітки складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів (7) за СГМ без зовнішнього формоутворюючого навантаження з врахуванням симетрії вихідних даних, чим буде забезпечена рівновага вузлів в плані.

План дискретного каркасу поверхні в шарі між площинами $\boldsymbol{\Gamma}$ – $\boldsymbol{D}$. представлений на рис.3.

$$
\begin{aligned}
&x_{i-1,j} + x_{i+1,j} - 4x_{i,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} = 0;\\
&y_{i-1,j} + y_{i+1,j} - 4y_{i,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} = 0;\\
&z_{i-1,j} + z_{i+1,j} - 4z_{i,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} = 0;\\
&x_{i,j+1} = 0.5y_{i,j-1} + 0.866x_{i,j-1};\ y_{i,j+1} = 0.5x_{i,j-1} - 0.866y_{i,j-1};\\
&48z_{i+1,j} - 48z_{0,0} = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

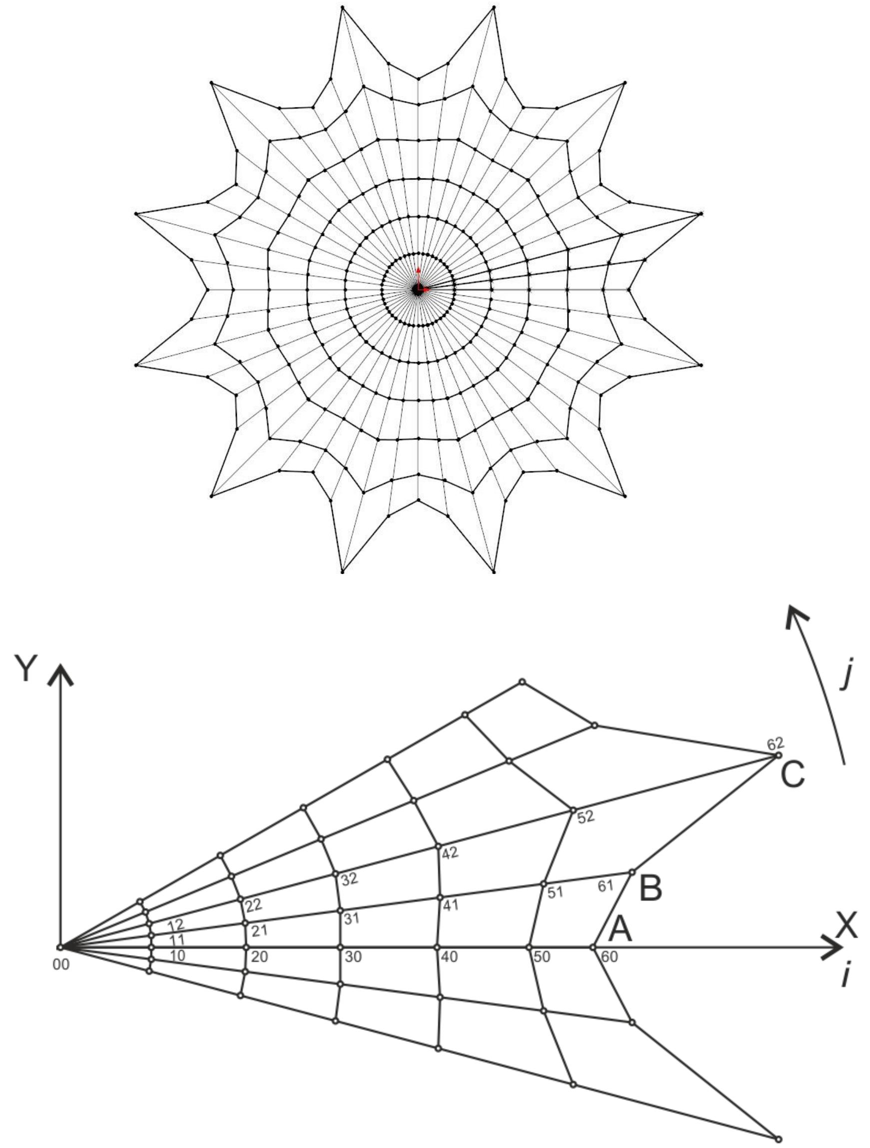

Рис. 3. План поверхні в шарі між площинами $\boldsymbol{\Gamma}$ – $\boldsymbol{D}$

а) загальний вигляд плану;

б) збільшений фрагмент 1/16 сітки в плану

Знайдені координати всіх точок дискретної сітки перераховуємо по формулам (3). Результати розрахунків представлено у таблиці 1.

За результатами всіх координат дискретної сітки, сформованої за допомогою СГМ та за допомогою зворотного перетворення інверсії, побудовано дискретно-представлену поверхню (рис. 4).

Таблиця 1

i=0	*i=1*	*i=2*	*i=3*	*i=4*	*i=5*	*i=6*	
x y z	1,4203 0.5867 12.0786	2.7317 1.1226 11.5155	3.8457 1.5768 10.6516	4.7076 1.90304 9.5836	5.2741 2.1288 8.4488	5.5433 2.2962 7.5001	*j=3*
	1.4869 0.39806 12.0775	2.8625 0.7661 11.5096	4.0381 1.0794 10.6240	4.9602 1.3211 9.4726	5.5274 14.8110 7.9229	5.7956 1.5529 6.000	*j=2*
	1.5234 0.2018 12.0786	2.9289 0.3903 11.5155	4.0677 0.5593 10.6975	5.0283 0.70561 9.5837	5.6253 0.7915 8.4391	5.9487 0.7833 7.5000	*j=1*
0.0000 0.0000 12.2743	1.5344 0.0000 12.0794	2.9476 0.0000 11.5207	4.1385 0.0000 10.6734	5.0409 0.0000 9.6598	5.6361 0.0000 8.6731	6.000 0.000 8.000	*j=0*

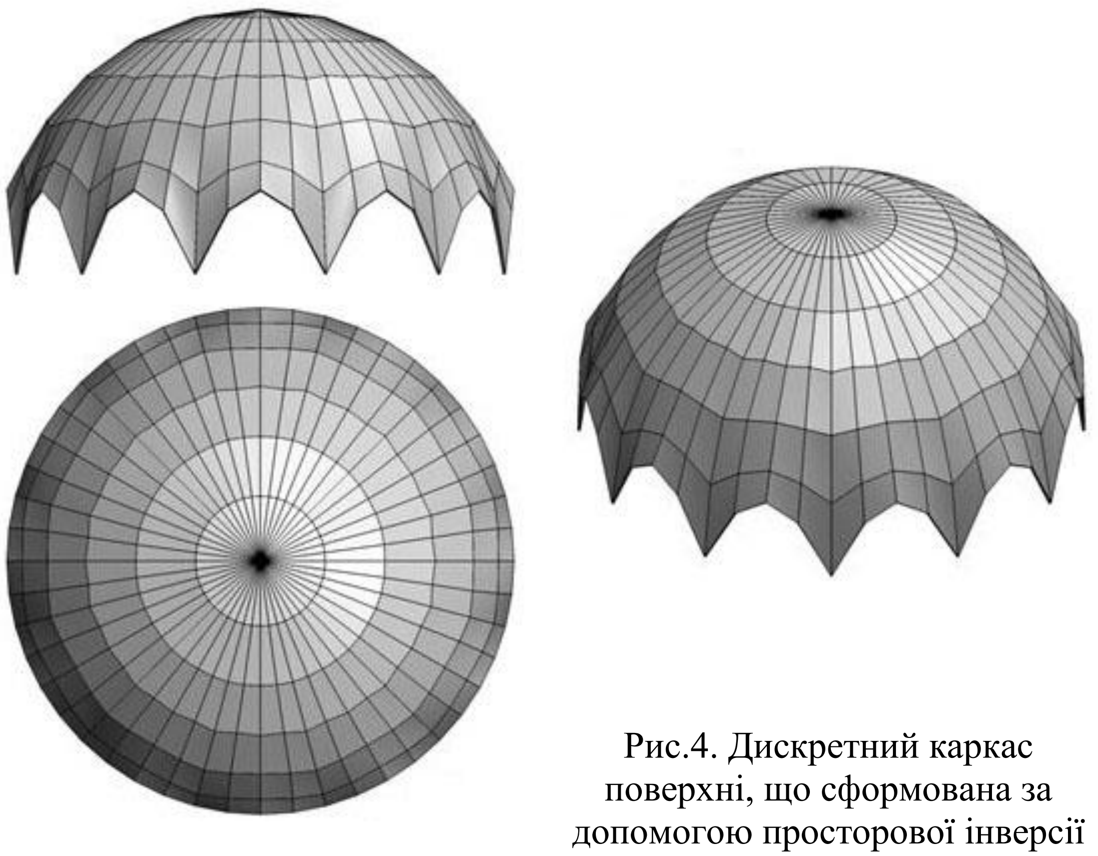

Рис.4. Дискретний каркас поверхні, що сформована за допомогою просторової інверсії

Висновки. Запропонований спосіб перенесення особливостей форми поверхні-прообразу на модельовану поверхню дозволяє дизайнеру або архітектору формально отримати дискретний каркас поверхні, що відповідає вихідним умовам.

Аналогічно можна використовувати будь-які інші перетворення, що мають свої особливості для врахування властивостей форми при дизайн-проектуванні та в архітектурі.

Література

1. Ковальов С.Н. Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями в дизайні та архітектурі / С.Н. Ковальов, С.И. Ботвіновська, А.В. Золотова // Управління розвитком складних систем. – 2016. – № 26.
2. Goggle. Вікіпедія [Електронний ресурс]: Режим доступу: www/URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Сфера/ - 06.05.2016 – Загл. з екрану.
3. Скопенко, В.А. Тентовая архитектура: «оригинальный эпилог» [Текст] / В.А. Скопенко // Академический вестник УралНИИпроектРААСН–ГРНТИ:67 – Строительство и архітектура, 2010. – № 40. – С. 89-95.
4. Удлер, Е.М. Проектирование тентових оболочек [Текст] / Е.М. Удлер, Е.Тостов // CAD master. – М., 2001. – № 1. – С. 43-47.
5. Казарян, Н.Л. Конструирование поверхностей на основе нелинейного преобразования пространства [Текст] / Н.Л. Казарян, В.В. Геворкян // Изв. НАН ОА и ГИУА. Сер. ТН., 2002. – T.LV. – № 2. – С. 282-285.
6. Савелов, А.А. Плоские криве. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство) / А.А. Савелов. − М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 289 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ СГМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНВЕРСИИ

Ковалев С.Н., Ботвиновская С.И., Золотова А.В.

В работе рассмотрен способ геометрического моделирования поверхностей статико-геометрическим методом с использованием пространственного преобразования инверсии.

Приведен пример моделирования дискретного каркаса поверхности с заданными свойствами на произвольном опорном контуре. Предложен алгоритм формообразования архитектурных

оболочек с сохранением такого композиционного свойства как округлость формы.

Использование инверсии значительно упрощает решение поставленной задачи. Предложенный способ переноса свойств формы поверхности-прообраза на моделируемую поверхность позволит дизайнеру или архитектору формально получить дискретный каркас поверхности, который будет соответствовать исходным данным.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, преобразование инверсии, свойства поверхностей, дискретный каркас, статико-геометрический метод, формообразование архитектурных оболочек.

GEOMETRIC MODELING OF SGM SURFACES WITH INVERSION TRANSFORMATION

S. Kovalev, S. Botvinovska, A. Zolotova

The paper considers the way of surfaces geometric modeling by the static-geometric method using spatial inversion transformation. An example of modeling of a discrete carcass surface with desired properties on an arbitrary reference circuits provided.

The algorithm of formation of architectural membranes with preserving of such property as a rounded shape is proposed. The inversion usage greatly simplifies the solution of the problem.

The proposed method of transporting properties of the prototype surface shape to the simulated surface will allow the designer or architect to formally receive the digital frame surface, which will correspond to the original data.

Keywords: geometric modeling, inversion transformation, the properties of surfaces, digital frame, static-geometric method, shaping architectural membranes.