УДК 514.18

СПЛАЙНЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ С УПРАВЛЯЮЩИМИ ТОЧКАМИ, ИНЦИДЕНТНЫМИ КРИВОЙ

Ковтун А.М., к.т.н.
Дунайский институт НУ «ОМА» (г. Измаил, Украина)

Предлагается способ построения сплайна на основе полинома третей степени с первым порядком гладкости, с управляющими точками, инцидентными кривой.

***Ключевые слова: полином в форме Лагранжа, сегмент полиномиальной кривой, управляющие точки, точки инцидентные кривой*.**

Постановка проблемы. Для моделирования гладких кривых, поверхностей и тел в конструировании машиностроительных агрегатов применяется способ представления векторно-параметрических кривых в форме Фергюсона и Бернштейна-Безье или с помощью рациональных векторно-параметрических функций. Но, при необходимости работать только с точками на кривой, эти способы не совсем удобны, поскольку каркасные серединные точки в форме Бернштейна-Безье не лежат на первично заданном точечном каркасе и в конечном виде не находятся на полученной кривой. Иногда не совсем удобно работать с кривыми в форме Фергюсона из-за необходимости расчета производных в узловых точках. Предложено представление векторно-параметрической кривой в виде, при котором каркасные точки будут принадлежать первично заданному точечному ряду и лежать на искомой кривой.

Анализ последних исследований и публикаций. В [1-10] приводятся способы описания кубических сплайнов. В [3,10] приводятся описания сплайна на основе полиномиальных сегментов по методу Лагранжа.

***Формулирование целей статьи*.** Предложено представление векторно-параметрической кривой в виде, при котором каркасные точки будут принадлежать первично заданному точечному ряду и лежать на искомой кривой. Разовьем эту идею дальше для получения кубических сплайнов. Для исследования такого способа представления возьмем для начала полиномиальные кривые третьей, четвертой и пятой степеней, применив формулу Лагранжа для интерполяции.

Основная часть. В [8, 9] показано, что для получения формулы полинома с необходимыми свойствами применим интерполяционный полином Лагранжа в зависимости **y=y(x).**

Назначим параметр **u = (x-x$_0$)/(x$_N$-x$_0$).**

$$y = \sum_{i=0}^{N} [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{(u-u_j)}{(u_i-u_j)}]. \qquad (1)$$

Если взять равномерное расположение точек **u_0 =0, u_N =1, u_i =i/N**, то формула (1) будет иметь вид:

$$y = \sum_{i=0}^{N} [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{(Nu-j)}{(i-j)}]. \qquad (2)$$

Таким образом, формулы (1) и (2) определяют полиномиальную кривую с точками, принадлежащими кривой.

Подставим конкретные значения параметра **u**. Назначим в этих точках значение параметра **u**: **u_0=0, u_1=1/3, u_2=2/3, u_3=1**, что будет отвечать равномерному расположению точек. Получим:

$$\begin{aligned} y = y_0 + (-\frac{11}{2}y_0 + 9y_1 - \frac{9}{2}y_2 + y_3)u + (9y_0 - \frac{45}{2}y_1 + 18y_2 - \frac{9}{2}y_3)u^2 + \\ +(-\frac{9}{2}y_0 + \frac{27}{2}y_1 - \frac{27}{2}y_2 + \frac{9}{2}y_3)u^3. \end{aligned} \qquad (3)$$

Также кривую (3) можно, после сокращения коэффициентов, записать в виде:

$$\begin{aligned} y = \frac{9}{2}[y_0(1-u)(\frac{2}{3}-u)(\frac{1}{3}-u) + 3y_1(1-u)(\frac{2}{3}-u)u + 3y_2(1-u)(u-\frac{1}{3})u + \\ +y_3(u-\frac{2}{3})(u-\frac{1}{3})u]. \end{aligned} \qquad (4)$$

Таким образом, все четыре точки лежат на кривой в пределах **u_0=0, u_3=1**. В данном случае назначенное конкретное значение параметра **u** в каждой точке, что отвечает их равномерному расположению.

Сплайн третьей степени с управляющими точками, инцидентными кривой

Локальный сплайн полинома третьей степени (дефект 2)

Возникает вопрос стыковки кубических кривых с управляющими точками, инцидентными кривой, при моделировании (конструировании) гладкой сплайновой кривой. Возьмем первую производную от (3) по **x**. Получим:

$$\begin{aligned} y'_x = y'_u u'_x = y'_u (\frac{x-x_0}{x_3-x_0})'_x = \{(-5.5y_0 + 9y_1 - 4.5y_2 + y_3) + \\ +(18y_0 - 45y_1 + 36y_2 - 9y_3)u - 13.5(y_0 - 3y_1 + 3y_2 - y_3)u^2\}\frac{1}{h}, \\ h = x_3 - x_0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Рассмотрим на стыке два кубических сегмента $\mathbf{S^{(0)}}$**,** $\mathbf{S^{(1)}}$ [8].

В предыдущем сегменте $\mathbf{S^{(0)}}$ при **u=1** (точка $\mathbf{3^{(0)}}$) получим производную:

$$y'^{(0)}_{x(u=1)} = \{-y_0^{(0)} + 4.5y_1^{(0)} - 9y_2^{(0)} + 5.5y_3^{(0)}\}\frac{1}{h^{(0)}}. \tag{6}$$

В следующем сегменте $\mathbf{S^{(1)}}$ при **u=0** (точка $\mathbf{0^{(1)}}$) имеем производную:

$$y'^{(1)}_{x(u=0)} = \{-5.5y_0^{(1)} + 9y_1^{(1)} - 4.5y_2^{(1)} + y_3^{(1)}\}\frac{1}{h^{(1)}}. \tag{7}$$

Приравняем (6) к (7). Если заменить верхние индексы **0, 1** на **i-1, i**, получим систему:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h^{(i-1)}}[4.5y_1^{(i-1)} - 9y_2^{(i-1)}] + \frac{1}{h^{(i)}}[4.5y_2^{(i)} - 9y_1^{(i)}] = \\ &= \frac{1}{h^{(i-1)}}[Y_0^{(i-1)} - 5.5Y_3^{(i-1)}] + \frac{1}{h^{(i)}}[Y_3^{(i)} - 5.5Y_0^{(i)}],\ i = 1,\dots,N-1.\end{aligned} \tag{8}$$

В правой части (8) $\mathbf{Y_0^{(i-1)}}$, $\mathbf{Y_3^{(i-1)}} = \mathbf{Y_0^{(i)}}$, $\mathbf{Y_3}^{(i-1)}$ – это заданные узловые точки интерполируемой кривой. В левой части четыре неизвестные точки $\mathbf{y_1^{(i-1)}}$, $\mathbf{y_2^{(i-1)}}$, $\mathbf{y_1^{(i)}}$, $y_2^{(i)}$. Если задать любые три точки, то четвертая определится из (8). Эти два сегмента будут стыковаться в точке $\mathbf{Y_3^{(i-1)}} \equiv \mathbf{Y_0^{(i)}}$ таким образом, что касательная для них будет единственна, то есть стыковка будет с первым порядком гладкости.

Алгоритм проектирования локального кубического сплайна с первым порядком гладкости.

На основе анализа формулы (8) можно предложить такой алгоритм проектирования локальной сплайна третьей степени с гладкостью первого порядка.

Пусть задано **N+1** точек **0, 1 ..., N**. На участке 0-1 зададим две промежуточные точки и еще одну на участке 1-2. На основе (8) будут определены первые два сегмента кривой. Дальше на участке 2-3 нужно задать только одну точку. Вторая определится из формулы (8). Таким образом определим и сегменты 2-3. Алгоритм для сегмента 3-4 повторяется аналогично участку 2-3 и т.д. Следовательно, дополнительные точки на каждом участке, начиная со второй, определятся рекуррентной зависимостью:

$$\begin{aligned}&y_2^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{h^{(i-1)}}[2y_2^{(i-1)} - y_1^{(i-1)} + \frac{2}{9}Y_0^{(i-1)} - \frac{11}{9}Y_3^{(i-1)}] + \\ &\quad + 2y_1^{(i)} + \frac{2}{9}Y_3^{(i)} - \frac{11}{9}Y_0^{(i)}, \\ &h^{(i-1)} = x^{(i)} - x^{(i-1)},\ h^{(i)} = x^{(i+1)} - x^{(i)}, \\ &i = 1,\dots,N-1.\end{aligned} \tag{9}$$

Алгоритм можно применять с двух концов. Он реализован в системе Auto CAD языком Auto LISP [9]. Тестовый пример подан на рис.1.

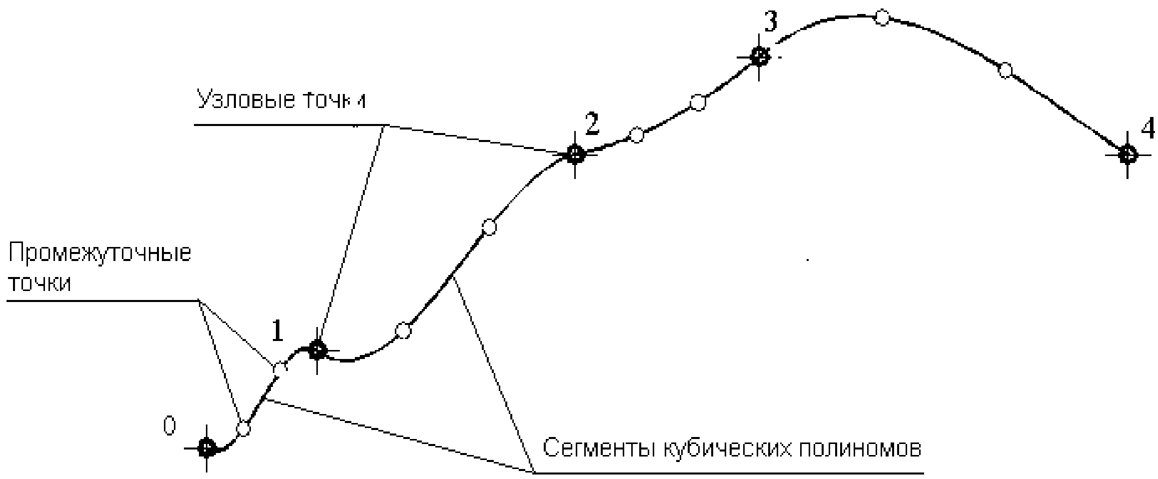

Рис.1. Тестовый пример кубического сплайна
с первым порядком гладкости

Выводы. Предложено представление векторно-параметрической кривой в виде, при котором каркасные точки будут принадлежать первично заданному точечному ряду и лежать на искомой кривой. Предлагается развить эту идею дальше для получения кубических сплайнов и сплайнов высших степеней, в частности четвертой и пятой степени. Для исследования такого способа представления взяты, для начала полиномиальные кривые третьей степени, применив формулу Лагранжа для интерполяции полинома.

Литература

1. Фокс А. Вычислительная геометрия[перевод с английского] / А.Фокс, М. Пратт. – Москва: Мир, 1982г. – 304с.
2. Завьялов Ю.С. Методы сплайн- функций / Ю.С. Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко. – Москва: Наука, 1982. – 352с.
3. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. / Н.Н. Голованов. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
4. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д.Роджерс, Дж. Адамс М.: Мир, 2001. – 604 с.
5. Якунин В.И. Геометрические основы автоматизированного проектирования технических поверхностей / В.И. Якунин – М.:Маи, 1980. – 86 с.
6. Alan Watt. 3D Computer Graphics. Third Edition/ Watt Alan. –

Addison-Wesley, 2000. – 570 p.
7. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С.Завьялов. – М.:Наука,1980. – 246 с.
8. Ковтун О.М. Поліноміальна крива третього степеня із управляючими точками, що належать кривій // Сучасні проблеми моделювання: зб. Наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – Вип. 4. – 162 с.
9. Бадаев Ю.И. Специальные сплайны из полиномов третей, четвертой и пятой степеней в геометрическом моделировании [Монография] / Ю.И. Бадаев, А.М. Ковтун. – Одесса: Феникс, 2011.
10. Ковтун О. М. Поліноміальна крива третього степеня із керуючими точками, що належать кривій. //Водний транспорт. Збірник наукових праць Київської державної академії водного транспорту імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного. – К.: КДАВТ, 2015. - № 1 (22) – 22с.

СПЛАЙН ТРЕТЬОГО СТУПЕНЯ З УПРАВЛЯЮЧИМИ ТОЧКАМИ, ІНЦИДЕНТНИМИ ДО КРИВОЇ

Ковтун О.М.

Пропонується спосіб побудови сплайна на основі полінома третьої степені з першим порядком гладкості, з управляючими точками, інцидентними кривої.

Ключові слова: поліном в формі Лагранжа, сегмент полиномиальної кривої, управляючі точки, точки інцідентні кривої.

THE THIRD DEGREE LAGRANGE-BASED POLYNOMIAL SPLINE WITH THE FIRST ORDER OF SMOOTHNESS IS GIVEN. THE OPERATING POINTS ARE INCIDENTAL TO A CURVE.

O. Kovtun

Splines are smooth but flexible curves, with great practical importance during constructing curvilinear forms and graphing. A method of constructing a third degree Lagrange polynomial-based spline with the first order of smoothness on points that incidental (belongs) a curve is proposed in this article.

Keywords: polynomial in the form of Lagrange polynomial curve segment, the control points, the curve points are incident.