

УДК 681.3

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ НА ПЕРСПЕКТИВНИХ ЗОБРАЖЕННЯХ

Сазонов К.О., д.т.н.,

Суліменко Г.Г., к.т.н.,

Суліменко С.Ю., аспірант\*

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
(Україна)*

*Проведено конструктивно-параметричний аналіз побудови поверхонь обертання, що задані віссю та обгортувальним конусом, запропоновані геометричні алгоритми формоутворення з використанням комп'ютерної технології та наведено приклади.*

*Ключові слова: поверхні обертання, лінія обрису, обгортувальний конус, технологія комп'ютерного моделювання.*

**Постановка проблеми.** Роль лінії обрису є визначальною в адекватному сприйнятті людиною об'єктів тривимірного віртуального простору на перспективних зображеннях. Але в сучасних графічних системах комп'ютерного моделювання відсутні засоби формоутворення поверхонь для цього випадку. Дизайн різних об'єктів буде дійсно ефективним з позицій естетики, якщо графічне формоутворення їх поверхонь буде реалізовано на перспективних зображеннях з використанням бажаних ліній обрису.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Побудову поверхонь обертання за перспективною лінією обрису розглянуто в роботі [1]. Наданий в ній алгоритм в цілому розв'язує задачу, але має декілька недоліків. Перш за все таке: для побудови кожної точки меридіану треба будувати переріз обгортувального конусу. Такий алгоритм може бути застосовано для моделювання поверхонь з криволінійною віссю, але для поверхонь обертання необхідно запропонувати і інші алгоритми.

**Формулювання цілей статті.** Виконати аналіз задачі та розробити максимально прості алгоритми її розв'язання, що будуть задовольняти різноманітні варіанти вихідних умов та нададуть можливість широким узагальнень.

**Основна частина.** Моделювання об'єктів дизайну за їх перспективними лініями обрисів спирається на властивості об'єктів та їх обгортувальних конусів. Наведемо деякі з них [2], разом з

---

\* Науковий керівник – д.т.н., проф. Сазаонов К.О.

очевидними корисними висновками:

- До довільної поверхні обертання обгортувальний конус дотикається по просторовій кривій. До поверхні обертання другого порядку – по плоскій кривій другого порядку.

- Кожна площина, що проходить через вісь поверхні обертання є її площиною симетрії. Та з них, що проходить через точку зору  $S$  є і площиною симетрії обгортувального конуса. На всіх рисунках її позначено як  $\Delta$ . Перспективна лінія обрису – переріз обгортувального конуса площиною картини. Якщо площина  $\Delta$  перпендикулярна картині її перспективна проекція  $\Delta'$  буде віссю симетрії лінії обрису. Такий випадок будемо називати тривіальним. В іншому разі користувач може задавати самостійно тільки половину лінії обрису по один бік від  $\Delta'$ .

- При заданій на картині перспективній лінії обрису по один бік від лінії  $\Delta'$ , обгортувальний конус повністю визначено, бо його друга половина може бути побудована як симетрична відносно площини  $\Delta$ .

- Кожна пряма з двопараметричної множини прямих площини  $\Delta$  може бути обрана як вісь поверхні обертання. Перспективні лінії обрису у всіх цих поверхонь будуть однаковими, але зображення граничних кіл (якщо такі існують) будуть відрізнятися.

Лінія обрису може бути задана на картині, що суміщена з площиною екрану одним з методів, що наявний в графічній системі моделювання. Але треба пам'ятати, що завдання лінії обрису обтяжено умовою: в кожній точці, що буде використатися для побудови має бути доступним положення дотичної прямої. Це окрема задача, що розв'язується в декількох варіантах, але не є предметом даної статті.

Покажемо справедливість твердження.

*Нехай: задана вісь обертання  $L$ ; точка зору  $S$  не належить  $L$ ; картина  $K$  перетинає площину  $\Delta(S,L)$ ; лінія обрису однозначно відображується на проекцію осі на картині; в кожній точці лінії  $r$  існує одна дотична. За цих умов поверхня обертання визначається однозначно.*

Але спочатку доведемо таке: якщо задана вісь поверхні обертання, то кожна точка лінії обрису з визначеною дотичною задає одне коло в площині, що перпендикулярна осі.

Конструктивна схема надана на рис. 1. Будемо вважати, що на лінії  $r \subset K$  визначено дискретну множину точок разом з дотичними в них. Пара  $\{P'_i, l_i\}$  та пряма  $SP'_i$  утворюють площину  $G_i$ , яка дотична і до обгортувального конусу, і до поверхні обертання, що моделюється. Осі  $L$  належать центри двопараметричної множини кіл в площинах, що перпендикулярні до неї. Однопараметрична множина з них дотикається до площини  $G_i$ . Точки дотику належать прямій, що є

перетином площини  $G_i$  та перпендикулярної до неї площини що проведена через вісь  $L$ . На рис. 1 це пряма  $A_iB_i$ . Шукана точка має належати прямій  $SP_i$  та прямій  $A_iB_i$ . На рис. 1 це точка їх перетину  $P_i$ .

Таким чином, кожна пара  $\{P'_i, l_i\}$  визначає одне коло поверхні обертання. На лінії обрису  $p$  маємо однопараметричну множину пар  $\{P'_i, l_i\}$ , тому вона однозначно задає поверхню обертання. Твердження доведено.

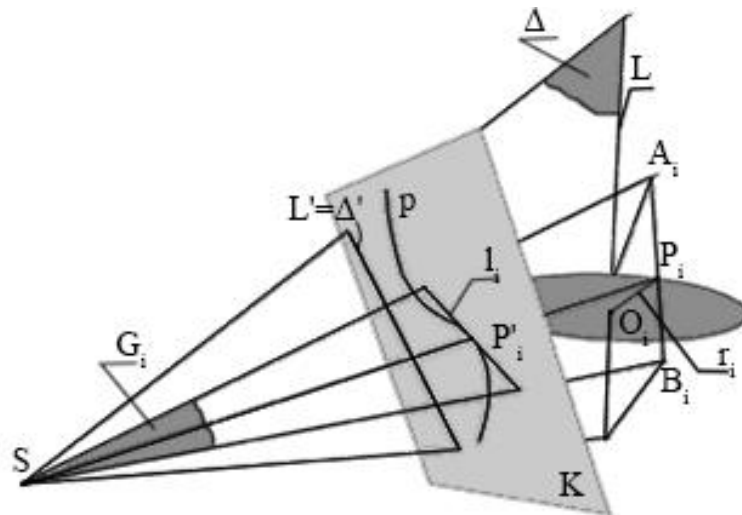


Рис.1. Загальна схема утворення поверхонь обертання

Поява на  $p$  особливих точок має бути досліджена окремо. Але і попередньо можна стверджувати: точки перегину та точки звороту

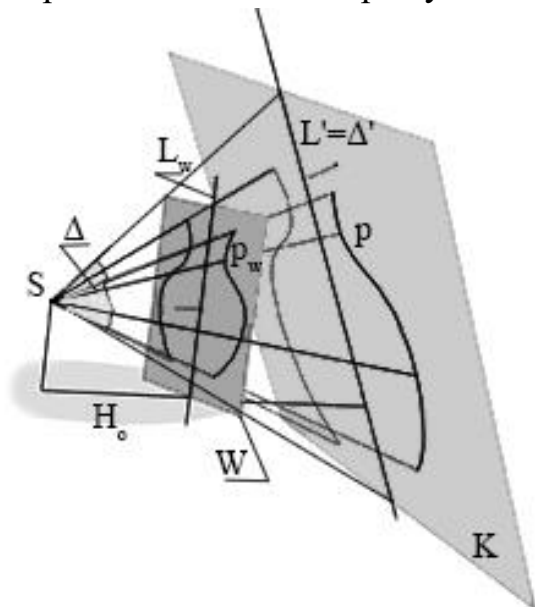


Рис.2. Приведення апарату перспективи до тривіального випадку

першого роду не суперечать умовам твердження; точка зламу обумовить розрив поверхні і її поява потребує додаткової інформації для його усунення. Інші особливості – точки звороту другого роду, самоперетину та самодотику суперечать умові твердження.

Необхідність нетривіального апарату, настає при проектуванні об'єкту, що складається з декількох поверхонь, які мають різні площини симетрії. У випадку поверхонь обертання їх осі мимобіжні. Така необхідність виникає і в статичному

випадку, а саме, на фотографії реальної сцени, або при підготовці

віртуального рекламного проспекту. Якщо людина спостерігає сцену в реальному просторі, вона слідує за об'єктами. При цьому змінюється положення картин – вони стають перпендикулярними до площини  $\Delta$ .

Користувачу системи слід надати обидві можливості.

Точка зору та лінія обрису на будь якій картині породжує обгортувальний конус. Після його визначення, з геометричної точки зору, положення картини не має значення і може бути змінено так, щоб настав тривіальний випадок. Для цього нова картина  $W$  має бути перпендикулярна до площини  $\Delta$  (рис. 2).

Площина  $W \perp \Delta$  має два вільних параметра, але їх значення не суттєві і можуть бути обрані довільно. Наприклад,  $W \parallel L$ , або навіть збігається з нею. Картина  $W$  має принаймні три застосування:

1. За її допомогою симетризується лінія  $p$ , що задана по один бік від  $\Delta$ . Для цього її проєкція на  $W$  симетрично відображується відносно осі  $L_W$  і зворотнім проєкціюванням повертається на площину  $K$ .
2. Переключаючи положення картини користувач може бачити як виглядатимуть лінії обрису, якщо спостерігач буде дивитися на окремий об'єкт.
3. Всі алгоритми розв'язання задач можуть бути орієнтовані на тривіальний випадок.

Все сказане вище, справедливо не тільки для поверхонь обертання з заданою віссю, а і для будь яких поверхонь, площини симетрії яких проходять через точку зору.

Схема моделювання при зведенні апарату проєкціювання до тривіального випадку надана на рис. 3. Тут площина  $W$  проведена паралельно осі  $L$ .

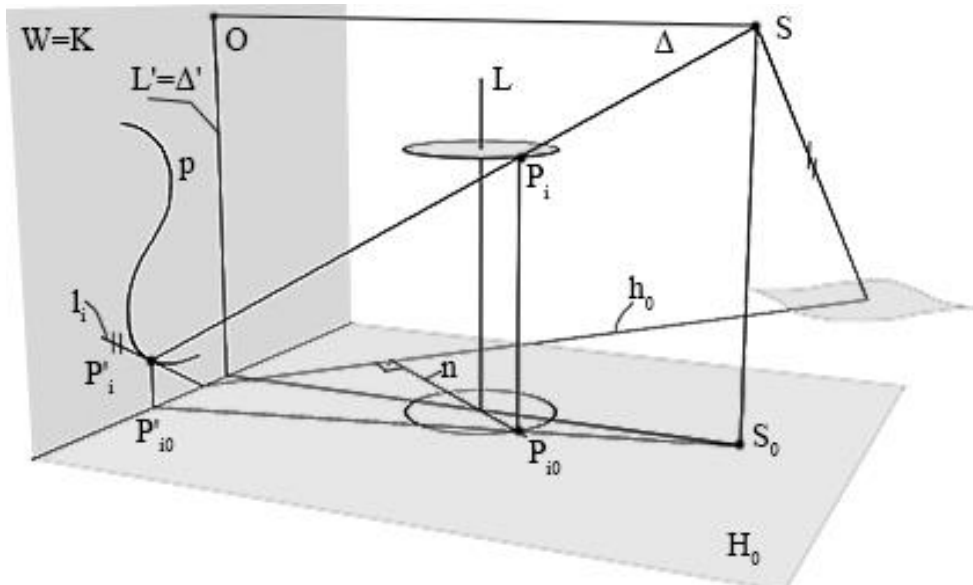


Рис. 3. Моделювання поверхні обертання в тривіальному випадку

Нехай площина  $H_0$  – довільна площина, що перпендикулярна до  $L$ . Дотична площина  $G_i$  визначається як і в загальному випадку за схемою рис.1. Пряма  $h_0$  це – лінія перетину площини  $G_i$  з площиною  $H_0$ . Тоді кола в точці дотику до  $G_i$  мають дотичну паралельну  $h_0$ . Спроецюємо далі на площину  $H_0$  точку зору  $S$  та точку  $P_i$  і отримаємо пряму  $P'_i S_0$ . З основи осі проводимо перпендикуляр  $n$  до прямої  $h_0$ . Його перетин з прямою  $P'_i S_0$  визначає точку  $P_{i0}$  та радіус шуканого кола. Зворотним проєкціюванням знаходимо точку  $P_i$  на прямій  $P'_i S$ , та центр кола на прямій  $l$  на тій самій висоті.

Виконуючи послідовно цю процедуру для множини  $\{P'_i l_i\}$  отримуємо множину  $\{P_i\}$ , яка визначає меридіан шуканої поверхні обертання.

На рис. 4 проілюстрована технологія графічного комп'ютерного моделювання. Просторову вісь обертання було визначено попередньо з конструктивних міркувань. На картині суміщеній з площиною екрану, задана проєкція осі і користувач зображує бажаний обрис поверхні обертання (рис.4,а).

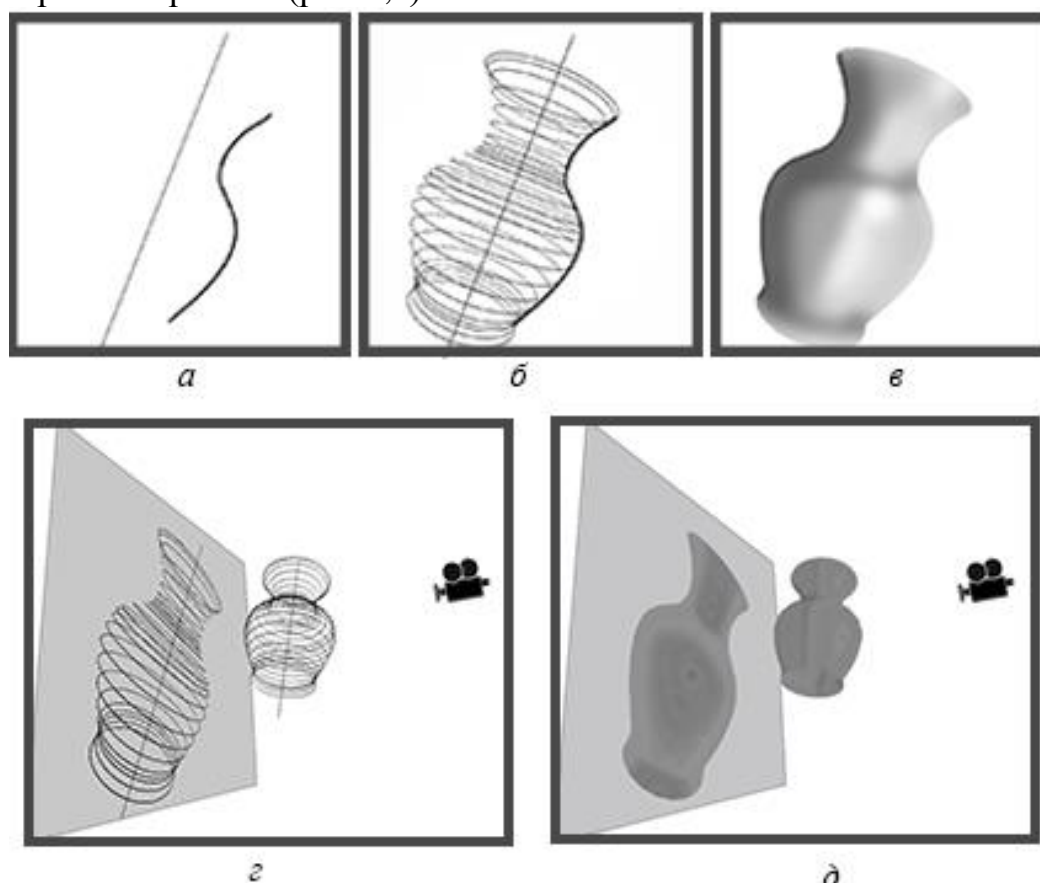


Рис.4. Приклад моделювання поверхні за заданою лінією обрису

Цієї інформації достатньо, щоб побудувати поверхню. На рисунку 4б вона зображена каркасом кіл, що будувались з схемою рисунка 1 показано, що контур поверхні збігається з попередньо

заданою лінією обрису, а на рисунку 4в надано її реалістичне зображення. Далі показано з якої точки зору виконувались побудови та розташування осі обертання в каркасному (рис. 4г) та в тонованому (рис.4д) зображеннях.

**Висновки.** Розглянуті властивості та алгоритми наведені як базові для моделювання поверхонь при більш складних вихідних умовах, наприклад, коли лінії обрису надані в повному обсязі а положення вісі треба визначити. Крім того, обрис поверхні обертання може бути обрисом множини поверхонь, площина симетрії яких проходить через точку зору.

### *Література*

1. Сазонов К.А. Компьютерное формообразование поверхностей вращения на перспективных изображениях по линиям очертания / К.А. Сазонов. – К.: Будівельник, 2012. – Вип.90. – С.298-301.
2. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии дополненные необходимыми сведениями из алгебры / П.С.Александров. – М.: «Наука», 1968. – 911с.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ НА ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ**

Сазонов К.А., Сулименко А.Г., Сулименко С.Ю.

*Проведен конструктивно-параметрический анализ построения поверхностей вращения, заданных осью и обертывающим конусом, предложены геометрические алгоритмы формообразования с использованием компьютерной технологии.*

*Ключевые слова: поверхность вращения, линия очертания, обертывающий конус, технология компьютерного моделирования.*

## **MODELLING OF SURFACES OF REVOLUTION ON PERSPECTIVE IMAGES**

K. Sazonov, H. Sulimenko, S. Sulimenko

*In current article, authors performed a structural and parametric analysis of formation of revolution surfaces specified with axis and a wrapping cone, offered shaping algorithms created with use of computer tech.*

*Keywords: surface of revolution, contours line, wrapping cone, computer-modelling technologies.*