УДК 514.18

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В МЕТОДЕ ВАРИАТИВНОГО ФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ УГЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

Спиринцев Д.В., к.т.н.,*
Лебедев В.А.,к.т.н.,
Балюба И.Г., д.т.н.
Мелитопольская школа прикладной геометрии,
Мелитопольский государственный педагогический университет
им. Богдана Хмельницкого (Украина)

Предлагается решение задачи сгущения дискретно представленной кривой (ДПК) методом вариативного формирования разностных схем угловых параметров с использованием дополнительных условий на соотношение углов смежности, которые приводят к формированию разностных схем первого порядка.

Ключевые слова: сгущение, разностные схемы, угловые параметры, вариативное дискретное геометрическое моделирование.

Постановка проблемы. Новые возможности в моделировании и управлении формой произвольных ДПК можно получить в результате наложения различных дополнительных условий на соотношение углов смежности в предложенной вариативной схеме [1]. Кроме того, необходимо, чтоб они имели возможность коррекции формы моделируемой кривой, обладали быстродействием и простотой расчетов и соответствовали внутренней геометрии исходной ДПК.

Анализ последних исследований и публикаций. Большинство дополнительных условий [1-4] навязывают сгущенной ДПК определённые свойства: равенство угла смежности в $i+0{,}5$ точке углу смежности в $i+1$ точке; равенство угла смежности в $i+0{,}5$ точке углу смежности в i точке; равенство угла смежности в $i+0{,}5$ точке полусумме углов смежности в точках i и $i+1$; равенство всех углов смежности в точках сгущения, и многие другие условия. Однако, наряду с имеющимися преимуществами, разработанные на сегодня методы ВДГМ, учитывающие угловые параметры [1-4], еще имеют перспективы дальнейшего развития и исследований которые были рассмотрены в работах Найдиша В.М. и его учеников, в

* Научный консультант – д.т.н., проф. Найдыш А.В.

направлении расширения возможностей управления формой моделируемой кривой. Поэтому разработка новых способов, в рамках существующих методов ВДГМ на основе моделирования угловых параметров, при отсутствии осцилляции, является актуальной.

Формулирование целей статьи. Предлагается расширить возможности моделирования произвольных ДПК за счет наложения нового дополнительного условия на соотношение между углами смежности, которое приводит к формированию разностной схемы первого порядка, применительно к методу вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

Основная часть. Рассмотрим исходную плоскую кривую (x_i, y_i), $i = 0,1,...,n$, которую необходимо сгустить при условии отсутствия осцилляции. Основная идея метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров заключается в том, что в работе [1] была предложена вариативную схема сгущения (1)

$$(1-\eta_{i-1})\gamma^1_{i-0.5} + \gamma^1_i + \eta_i \gamma^1_{i+0.5} = \gamma^0_i, \quad i = \overline{1;n-1}. \qquad (1)$$

Однако, выражение (1) не является разностной схемой. Поэтому, для нахождения дополнительных уравнений, необходимо применить одно из дополнительных условий, которое будет связывать углы смежности исходной и сгущенной ДПК. Запишем дополнительное условие (2) на соотношение углов смежности, которое переносит соотношение между углами смежности с исходной на сгущенную ДПК, сохраняя при этом ее геометрические свойства (рис. 1):

$$\frac{\gamma^0_{i+1}}{\gamma^0_i} = \frac{\gamma^1_{i+0,5}}{\gamma^1_i}, \text{ отсюда } \gamma^1_i = \frac{\gamma^0_i}{\gamma^0_{i+1}} \cdot \gamma^1_{i+0,5} \quad i = \overline{0;n-1}. \qquad (2)$$

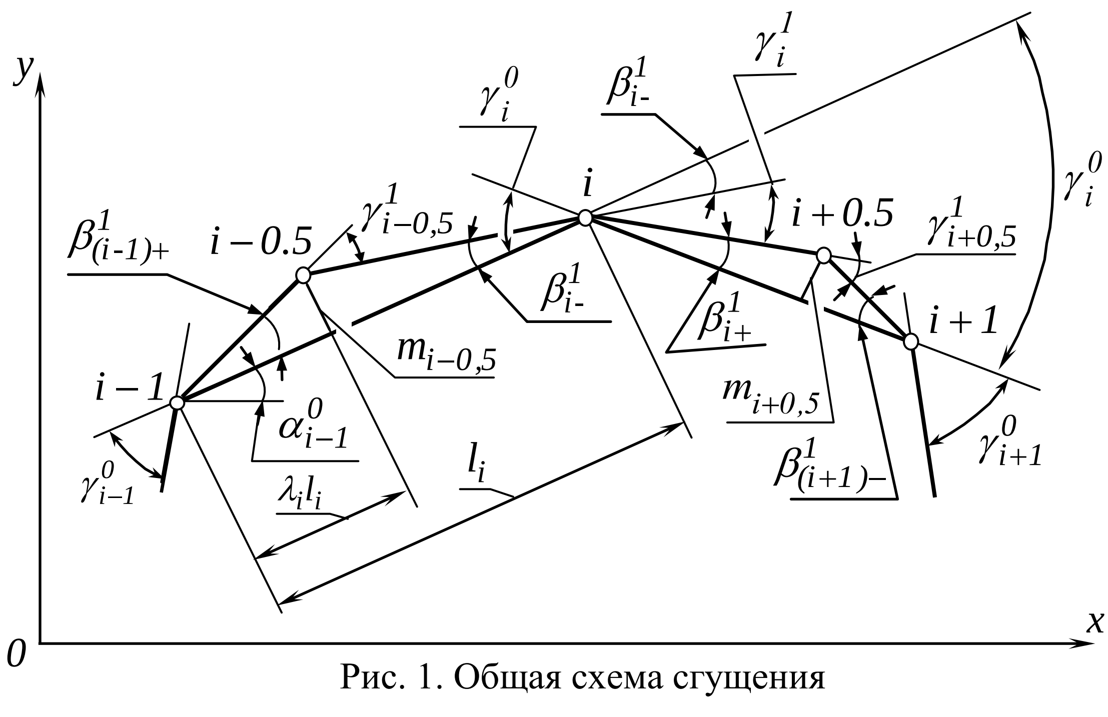

Рис. 1. Общая схема сгущения

Выражение (1) с учетом (2) принимает следующий вид:

$$(1-\eta_{i-1})\gamma^1_{i-0,5}+\left(\frac{\gamma^0_i}{\gamma^0_{i+1}}+\eta_i\right)\gamma^1_{i+0,5}=\gamma^0_i,\ i=\overline{1;n-1}. \quad (3)$$

Полученная система уравнений (3) является разностной схемой 1-го порядка и связывает углы смежности в точках сгущения сгущенной ДПК с углами смежности исходной ДПК. Имеем $(n-1)$ уравнений с n неизвестными. Один из углов смежности можно принимать в качестве управляющего параметра и задавать его таким образом, чтобы обеспечивалось условие отсутствия осцилляции. Будем принимать в качестве управляющего параметра один из углов в точке сгущения.

Для решения разностной схемы (3) и построения точек сгущения применим следующую методику.

1. Из системы уравнений (3) определяются зависимости между углами смежности в точках сгущения – выражение (4).

$$\begin{aligned}&\gamma^1_{1,5}=A_{1,5}-B_{1,5}\cdot\gamma^1_{0,5}\\&\gamma^1_{2,5}=A_{2,5}-B_{2,5}\cdot\gamma^1_{1,5}\qquad i=\overline{1;n-1},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\gamma^1_{i+0,5}=A_{i+0,5}-B_{i+0,5}\cdot\gamma^1_{i+0,5}\end{aligned} \quad (4)$$

где $A_{i+0,5}=\dfrac{(\gamma^0_i+\gamma^0_{i+1})\cdot\gamma^0_{i+1}}{\gamma^0_i+2\gamma^0_{i+1}}$, $B_{i+0,5}=\dfrac{(\gamma^0_i+\gamma^0_{i+1})\cdot\gamma^0_{i+1}}{(\gamma^0_{i-1}+\gamma^0_i)\cdot(\gamma^0_i+2\gamma^0_{i+1})}$ – некоторые коэффициенты.

2. Один из углов смежности в точке сгущения выбирается в качестве управляющего параметра, после чего выражаются все углы смежности в точках сгущения через данный управляющий параметр.

3. Накладываются условия отсутствия осцилляции [4] на полученные в предыдущем пункте зависимости.

4. Решается полученная система неравенств относительно управляющего параметра. Из отрезка решений выбирается допустимое значение управляющего параметра.

5. Рассчитываются значения остальных углов смежности в точках сгущения ($\gamma^1_{i+0,5}$, $i=\overline{0;n-1}$) путем подстановки значения управляющего параметра в полученные в (4) зависимости. Значения углов смежности в узловых точках ($\gamma^1_i, i=\overline{0,n-1}$) находятся из выражения (2).

6. С учётом полученных значений углов смежности определяются основные геометрические характеристики сгущённой кривой [5]. Затем определяются координаты $x_{i+0,5}, y_{i+0,5}$ точек сгущения согласно основного алгоритма сгущения.

7. Критерием окончания сгущения является достижение условия (5) на *k*-м шаге сгущения

$$\max_{i=0...n-1}\left|\gamma^1_{i+0,5}\right| \le \varepsilon, \tag{5}$$

где $\varepsilon \ge 0$ - как угодно малое наперед заданное число.

При необходимости продолжения сгущения, точки ряда перенумеровываются и расчёт повторяется.

8. По достижении условия (5) точки сгущенной ДПК соединяются отрезками СЛЛ, которая и считается окончательной формой интерполирующей кривой.

В качестве примера рассмотрим решение задачи сгущения дискретно представленного точечного ряда (таблица 1) на неравномерной сетке с точностью ε = *0,4* при условии, что полученная дискретно представленная кривая должна быть неосциллирующей.

Таблица 1

Исходный точечный ряд

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
x_i^0	10	25	50	70	100	120	110	90	70
y_i^0	20	50	80	90	90	75	50	35	50

Сгущение тестового примера производилось согласно описанной выше методики в соответствии с основным алгоритмом метода сгущения [5].

В качестве управляющего параметра принимается угол смежности $\gamma^1_{0,5}$ и выражаются все остальные углы $\gamma^1_{i+0,5}, i=\overline{1,7}$ через угол $\gamma^1_{0,5}$ (таблица 2, п.2).

Накладываются на полученную систему уравнений условия отсутствия осцилляции (таблица 2, п.3). В результате получается следующая система неравенств (таблица 2, п.4).

Решением полученной системы неравенств является отрезок $[-26.481\,;0]$ из которого выбирается значение управляющего параметра. Принимается значение управляющего параметра равным $\gamma^1_{0,5} = -10$.

С учётом полученного значения управляющего параметра определяются значения остальных углов смежности (таблица 2, п.5).

Проверяется на необходимость в дальнейшем сгущении по условию (5)

$$\max\left|\gamma^1_{i+0,5}\right| = 0{,}635 > 0{,}4 .$$

Данное условие не соблюдается, следовательно, точки ряда перенумеровываются и осуществляется следующий шаг сгущения.

Таблица 1

Результаты выполнения пунктов описанной выше методики
для 1 шага сгущения

Угол	Методика решения разностных схем			
	п.2	п.3	п.4	п.5
				$\gamma^1_{0,5}=\mathbf{-10}$
$\gamma^1_{1,5}=$	$-14{,}400-0{,}544\gamma^1_{0,5}$	$\gamma^1_{1,5}<0$	$\gamma^1_{0,5}>-26{,}48$	$\gamma^1_{1,5}=-8{,}962$
$\gamma^1_{2,5}=$	$-10{,}587+0{,}256\gamma^1_{0,5}$	$\gamma^1_{2,5}<0$	$\gamma^1_{0,5}<41{,}32$	$\gamma^1_{2,5}=-13{,}149$
$\gamma^1_{3,5}=$	$-18{,}399-0{,}119\gamma^1_{0,5}$	$\gamma^1_{3,5}<0$	$\gamma^1_{0,5}>-154{,}62$	$\gamma^1_{3,5}=-17{,}209$
$\gamma^1_{4,5}=$	$-31{,}851+0{,}084\gamma^1_{0,5}$	$\gamma^1_{4,5}<0$	$\gamma^1_{0,5}<378{,}41$	$\gamma^1_{4,5}=-32{,}693$
$\gamma^1_{5,5}=$	$-17{,}303-0{,}018\gamma^1_{0,5}$	$\gamma^1_{5,5}<0$	$\gamma^1_{0,5}>-949{,}64$	$\gamma^1_{5,5}=-17{,}120$
$\gamma^1_{6,5}=$	$-36{,}274+0{,}007\gamma^1_{0,5}$	$\gamma^1_{6,5}<0$	$\gamma^1_{0,5}<4882{,}17$	$\gamma^1_{6,5}=-36{,}349$
$\gamma^1_{7,5}=$	$-32{,}188-0{,}004\gamma^1_{0,5}$	$\gamma^1_{7,5}<0$	$\gamma^1_{0,5}>-9262{,}66$	$\gamma^1_{7,5}=-32{,}153$

Для обеспечения заданной точности сгущения было осуществлено два шага сгущения. На втором шаге сгущение условие (5) было соблюдено

$$max\left|\gamma^1_{i+0,5}\right|=0{,}318<0{,}4$$

Для выполнения данных расчётов был использован математический пакет MAPLE.

Виводы. В работе рассмотрено новое дополнительное условие на соотношение углов смежности, в результате подстановки которого в вариативную схему сгущения (1) получается разностная схема первого порядка. Особенностью данной схемы, во-первых, является её простота, поскольку в результате решения разностной схемы имеем отрезок решений, а не многоугольник (проще в программной реализации), во-вторых, данное дополнительное условие не навязывает сгущённой ДПК какие-то определённые свойства, а переносит соотношения между углами смежности с исходной на сгущённую сохраняя при этом её геометрические свойства.

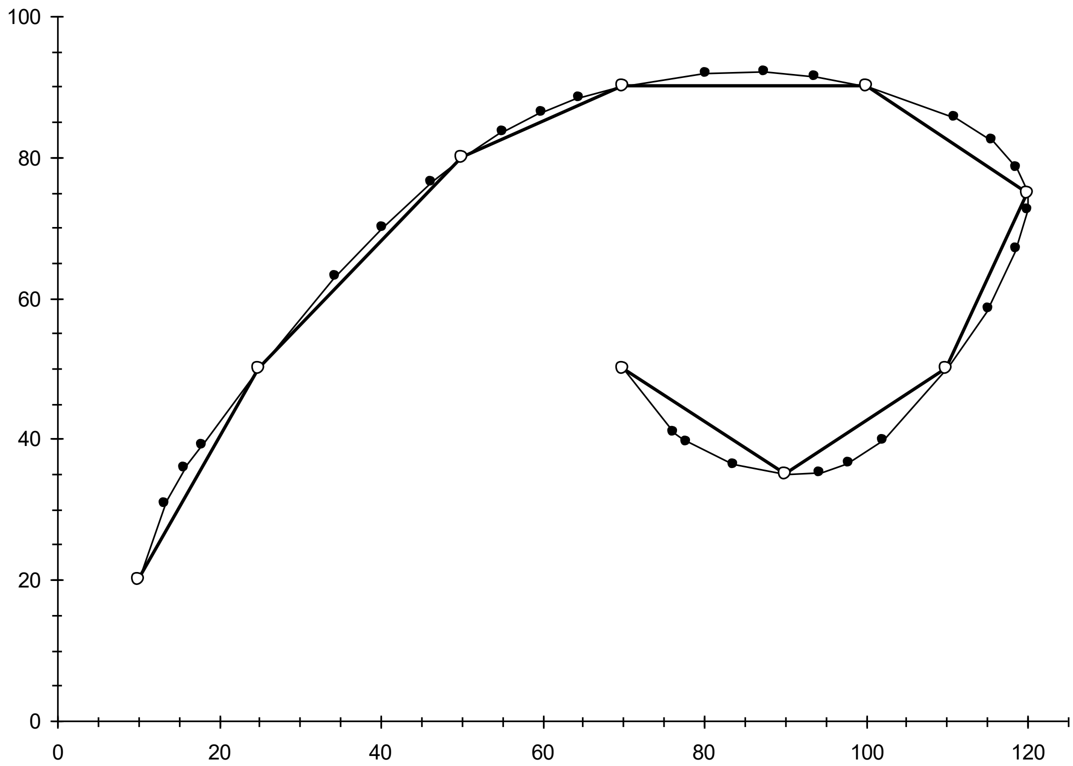

Рис.2. Результат сгущения тестовой ДПК при наложении дополнительного условия (2) в вариативную схему (1).

Литература

1. Спиринцев Д.В. Дискретная интерполяция на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Д.В. Спиринцев. – Мелітополь, ТГАТУ, 2010. – 214 с.
2. Спірінцев Д.В. Застосування додаткових умов моделювання у методі на основі варіативного формування різницевих схем кутових параметрів [Електронний ресурс] / А.В. Найдиш, Д.В. Спірінцев // Науковий вісник ТДАТУ. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 1. - Т.2. – С. 150-160.
3. Спірінцев Д.В. Використання різницевих схем другого порядку для згущення дискретно представлених кривих / А.В. Найдиш, Д.В. Спірінцев // Праці XIII Міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні проблеми геометричного моделювання”. – Мелитополь: ТГАТУ, 2011. – С. 3-9.
4. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії [навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації] / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – 194с.
5. Спиринцев Д.В.Основной алгоритм метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров / Д.В. Спиринцев, А.В. Найдиш // Сборник докладов XVIII

Юбилейной международной научно-практической конференции «Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы». – Выпуск 18. – Минеральные Воды, 2013. – С. 147-150.

ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В МЕТОДІ ВАРІАТИВНОГО ФОРМУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ КУТОВИХ ПАРАМЕТРІВ

Спірінцев Д.В., Лебедєв В.О., Балюба І.Г.

Пропонується рішення задачі згущення ДПК методом варіативного формування різницевих схем кутових параметрів з використанням додаткової умови на співвідношення кутів суміжності, що приводять до формування різницевих схем першого порядку.

Ключові слова: згущення, різницеві схеми, кутові параметри, варіативної дискретне геометричне моделювання.

APPLYING OF DIFFERENCE SCHEMES FIRST ORDER IN METHOD OF DISCRETE INTERPOLATION ON A BASIS VARIATIVE FORMATIONS DIFFERENCE SCHEMES OF ANGULAR PARAMETRES

D. Spirintsev, V. Lebedev, I. Baluba

The proposed solution to the problem of interpolation DPC by method of variable angular parameters of difference schemes with additional conditions obtained by the superposition of additional conditions on ratio between the adjacent angles that leads to the formation of the first order difference schemes.

Keywords: interpolation, difference schemes, angular parameters, variability discrete geometric modeling.