

УДК 514.18

ЗГУЩЕННЯ ДИСКРЕТНО ПОДАНОЇ КРИВОЇ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СУПРОВІДНИХ ТРИКУТНИКІВ

Верещага В.М., д.т.н.,

Павленко О.М.

Мелітопольська школа прикладної геометрії,

Мелітопольський державний педагогічний університет

ім. Богдана Хмельницького (Україна)

Запропоновано розширення можливостей способу супровідних трикутників шляхом розробки алгоритму, який дозволяє згущувати точкові ряди, що мають точки зламу, звороту, розриву та інше.

Ключові слова: дискретно подана крива (ДПК), згущення, точкове рівняння, трикутник, симплекс, точкове числення Балюби-Найдиша (БН-числення).

Постановка проблеми. Основою досліджень цього підрозділу стали роботи Найдиша В.М., Балюби І.Г., Верещаги В.М., Найдиша А.В. [1-4]. Для дискретно поданої кривої (ДПК) супровідний трикутник і полоса дифпроекцій [5] мають одну й ту саму природу походження, які з однаковим успіхом використовуються у варіативному дискретному геометричному моделюванні. У цій статті розглядається застосування супровідних трикутників (СТ) з використанням способів точкового БН-числення для згущення ДПК. Це питання розроблялось у роботі [6], відмінність нашого дослідження полягає у іншому поданні параметрів, тобто використовується інша геометрія числа.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [1,6] і цій статті задача згущення дискретно поданої кривої із застосуванням супровідних трикутників, розглядається вперше у точковому БН-численні, розвитком якого займається Мелітопольська школа прикладної геометрії.

Формування цілей статті. Розширити можливості способу супровідних трикутників шляхом розробки алгоритму, який дозволить згущувати точкові ряди, що мають точки зламу, звороту, розриву тощо.

Основна частина. Для проведення досліджень спочатку розглянемо геометричну схему загального вигляду, яку зображено на рис. 1. Під загальним виглядом симплексу треба розуміти те, що

жодна з точок A, B, C , що визначають симплекс CAB , не співпадає з точками D_i , які визначають дискретно подану криву: $D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, D_{i+2}$.

Для розв'язку задачі необхідно з ДПК взяти перші чотири точки, а потім зрушитись на одну точку і розглянути наступну четвірку точок, $D_i, D_{i+1}, D_{i+2}, D_{i+3}$. Цей процес необхідно повторювати, доки не дійдемо до останньої точки, що визначають ДПК.

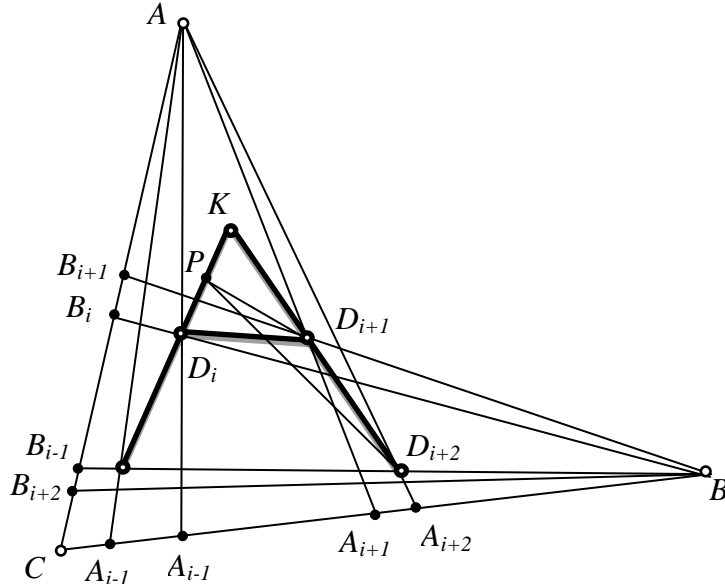


Рис. 1. Схема згущення за загальним виглядом

На запропонованій схемі (рис. 1) точки ДПК $D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, D_{i+2}$ з'єднані відтинками прямих для наочності, ніякого сенсового навантаження вони не несуть. Координати усіх точок $A, B, C, D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, D_{i+2}$, що подані на рис. 1 відомі і визначені у якійсь глобальній системі координат (не показана на рис.1, тому що можна взяти будь-які). Оскільки точки A, B, C визначають локальний симплекс CAB , то інші чотири точки D_i необхідно виразити через точки симплексу. Точкові рівняння, що відповідають цій вимозі мають вигляд:

$$D = (A - C)p + (B - C)q + C. \quad (1)$$

У роботі [6] у якості параметрів p і q розглядалися відношення трикутників, у нашій роботі пропонується використовувати відношення відтинків.

$$\text{Для точки } D_{i-1}: p_{i-1} = \frac{D_{i-1}A_{i-1}}{AA_{i-1}}; q_{i-1} = \frac{D_{i-1}B_{i-1}}{BB_{i-1}};$$

$$\text{для точки } D_i: p_i = \frac{D_iA_i}{AA_i}; q_i = \frac{D_iB_i}{BB_i};$$

$$\text{для точки } D_{i+1} : p_{i+1} = \frac{D_{i+1}A_{i+1}}{AA_{i+1}}; q_{i+1} = \frac{D_{i+1}B_{i+1}}{BB_{i+1}};$$

$$\text{для точки } D_{i+2} : p_{i+2} = \frac{D_{i+2}A_{i+2}}{AA_{i+2}}; q_{i+2} = \frac{D_{i+2}B_{i+2}}{BB_{i+2}}.$$

Виходячи з (1) та враховуючи визначені параметри, можна записати точкові рівняння для означених точок:

$$D_{i-1} = (A - C)p_{i-1} + (B - C)q_{i-1} + C; \quad (2)$$

$$D_i = (A - C)p_i + (B - C)q_i + C; \quad (3)$$

$$D_{i+1} = (A - C)p_{i+1} + (B - C)q_{i+1} + C; \quad (4)$$

$$D_{i+2} = (A - C)p_{i+2} + (B - C)q_{i+2} + C. \quad (5)$$

Використовуючи чотири точки (2) – (5) можемо побудувати одну точку загушення $D_{i+0.5}$ у трикутнику $\Delta D_i D_{i+1} K$. Перші дві точки з цього трикутника D_i та D_{i+1} визначені у симплексі $СAB$ (3) та (4). Необхідно визначити останню вершину трикутника – точку K . Знайдемо її як результат перетину прямих $D_{i-1}D_i$ та $D_{i+1}D_{i+2}$. Для цього на прямій $D_{i-1}D_i$ введемо змінювану точку P , точкове рівняння якої матиме вигляд (рис. 1):

$$P = (D_{i-1} - D_i)u + D_i. \quad (6)$$

Переміщуючи точку P по прямій $D_{i-1}D_i$ шляхом зміни параметру u , необхідно обрати таке його значення, щоб площа трикутника $S_{D_{i+1}D_{i+2}P}$ опинилась рівною нулю, або іншими словами, щоб три точки P, D_{i+1}, D_{i+2} знаходились на одній прямій. За умовою колінеарності для того, щоб точка P належала прямій $D_{i+1}D_{i+2}$ необхідно щоби визначник, який віддзеркалює точкове рівняння прямої, дорівнював нулю. Складемо цей визначник, але спочатку у точкове рівняння (6) підставимо точкові рівняння (2) та (3), що визначають точки D_i та D_{i-1} .

$$P = (A - C)uq_{i-1} + (B - C)uq_{i-1} + Cu - (A - C)up_{i-1} - (B - C)uq_i - Cu + (A - C)p_i + (B - C)q_i + C = (A - C)(up_{i-1} - up_i + p_i) + (B - C)(uq_{i-1} - up_i + q_i) + C.$$

У кінцевому варіанті, зручним для подальших дій маємо:

$$P = (A - C)(u(p_{i-1} - p_i) + p_i) + (B - C)(u(q_{i-1} - q_i) + q_i) + C. \quad (7)$$

Таким чином визначник, за допомогою якого буде утворюватися точкове рівняння прямої $D_{i+1}D_{i+2}$, на якій буде знаходитися точка P , складемо з параметрів точкових рівнянь (7), (4) та (5). У першому рядку визначника змінні параметри точки P , у другому – незмінні параметри точки D_{i+1} , у третьому – D_{i+2} , дістанемо:

$$\begin{vmatrix} u(p_{i-1} - p_i) + p_i & u(q_{i-1}q_i) + q_i & 1 \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_{i+2} & q_{i+2} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Розкриємо його:

$$u(p_{i-1} - p_i)q_{i+1} + p_iq_{i+1} + u(q_{i-1} - q_i)p_{i+2} + q_i p_{i+2} + p_{i+1}q_{i+2} - \\ - u(p_{i-1}p_i)q_{i+2} - p_iq_{i+2} - u(q_{i-1} - q_i)p_{i+1} - q_i p_{i+1} - p_{i+2}q_{i+1} = 0.$$

Звідки визначимо параметри:

$$u = \frac{p_{i+2}q_{i+1} + q_i p_{i+1} + q_i p_{i+2} - p_{i+1}q_{i+2} - q_i p_{i+2} - p_i q_{i+1}}{(p_{i-1} - p_i)q_{i+1} + (q_{i-1} - q_i)p_{i+2} - (p_{i-1} - p_i)q_{i+2} - (q_{i-1} - q_i)p_{i+1}}. \quad (9)$$

Якщо число із (9) прирівняти до d , дістанемо:

$$d = \frac{p_{i+2}(q_{i+1} - q_i) + p_{i+1}(q_i - q_{i+2}) + p_i(q_{i+2} - q_{i+1})}{(p_{i-1} - p_i)(q_{i+1} - q_{i+2}) + (q_{i-1} - q_i)(p_{i+2} - p_{i+1})}. \quad (10)$$

Підставимо число d із (10) у (7), отримаємо шукану точку K :

$$K = P = (A - C)(d(p_{i-1} - p_i) + p_i) + (B - C)(d(q_{i-1} - q_i) + q_i) \quad (11)$$

У трикутнику $\Delta D_i D_{i+1} K$, винесемо його зображення з рис. 1 на окремий рисунок 2, розрахуємо точку загушення $D_{i+0,5}$. У роботі [6] обґрунтовано безліч можливих варіантів вибору точки загушення, на наш погляд, найпростішим є розрахунок точки загушення як центра ваги трикутника $\Delta D_i D_{i+1} K$

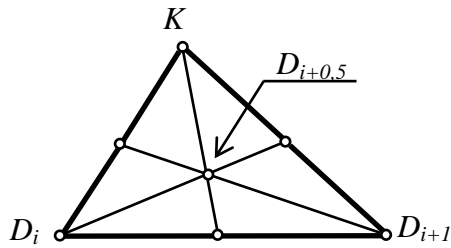


Рис. 2. Визначення точки загушення $D_{i+0,5}$

$$D_{i+0,5} = \frac{D_i + D_{i+1} + K}{3}. \quad (12)$$

Розрахункові формули координат точки загушення у глобальній системі координат матимуть наступний вигляд:

$$x_{i+0,5} = \frac{x_i + x_{i+1} + x_k}{3}, \\ y_{i+0,5} = \frac{y_i + y_{i+1} + y_k}{3}, \quad (13) \\ z_{i+0,5} = \frac{z_i + z_{i+1} + z_k}{3}.$$

Таким чином, вище було розглянуто спосіб побудови однієї точки загушення $D_{i+0,5}$ з використанням формалізованого геометричного апарату точкового БН-числення. Для побудови наступної точки загушення необхідно зрушитись на один крок і повторити увесь алгоритм для наступних чотирьох точок і так далі по усьому точковому ряду ДПК.

При виконанні процесу загушення ДПК на кожному кроці

обирався симплекс загального вигляду (точки, що визначали симплекс, не співпадали з точками кривої) по відношенню до вихідних точок точкового ряду, в результаті чого розрахункові формули виявились громіздкими і обчислення за цими формулами збільшує витрати ресурсів. Симплекс загального вигляду можна назвати нульчастинним.

Одночастинним симплексом будемо називати симплекс, вершина або одна з точок, що його визначають, співпадають з точкою ДПК (рис. 3).

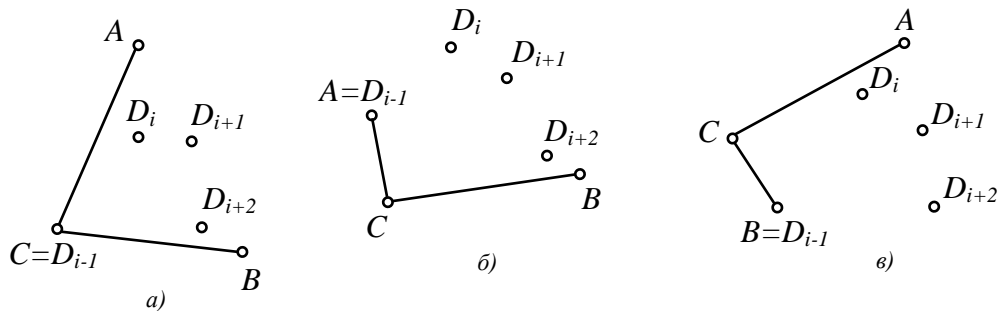


Рис. 3. Приклади одночастинних симплексів:

- а) – вершина $C=D_{i-1}$; б) точка симплексу $A=D_{i-1}$;
в) точка симплексу $B=D_{i-1}$

Треба зауважити, що у наведених прикладах а), б), в) точки симплексу A, B, C як показано співпадають з точкою D_{i-1} , але це не обов'язково, можливо їхнє спів падання із іншими точками ДПК – D_i, D_{i+1}, D_{i+2}

Двохчастинним симплексом будемо називати симплекс, коли дві точки, що його визначають, співпадають у різних варіаціях з точками ДПК (рис. 4).

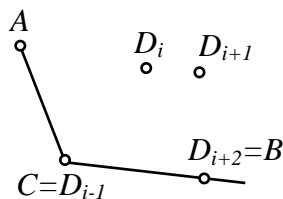


Рис. 4. Приклад двухчастинного симплексу

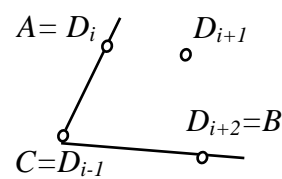


Рис. 5. Приклад трьохчастинного симплексу

Трьохчастинним симплексом будемо називати симплекс, коли усі три точки, що його визначають, співпадають у різних варіаціях з точками ДПК (рис. 5).

Покажемо наскільки спрощується, у порівнянні з використанням симплексу загального вигляду, розрахунки для одно-, дво-, і трьохчастинного симплексів.

Для прикладу розглянемо одночастинний симплекс, що

зображений на рис. 3а), у якого вершина симплексу – точка C збігається з точкою D_{i-1} дискретно поданої кривої.

Завдяки цьому, точкове рівняння (2) матиме вигляд:

$$D_{i-1} = C. \quad (14)$$

Тоді точкове рівняння (6) матиме вигляд:

$$P = Cu - (A - C)up_i - (B - C)uq_i - Cu + (A - C)p_i + (B - C)q_i + C = (A - C)p_i(1 - u) + (B - C)q_i(1 - u) + C. \quad (15)$$

Визначник (8) прийме вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 - u & 1 - u & 1 \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_{i+2} & q_{i+2} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Розкриємо цей визначник і дістанемо значення параметру u :

$$\begin{aligned} (1 - u)q_{i+1} + (1 - u)p_{i+2} + p_{i+1}q_{i+2} - p_{i+2}q_{i+1} - (1 - u)q_{i+2} - (1 - u)p_{i+1} &= 0 \\ (1 - u)(q_{i+1} + p_{i+2} - q_{i+2} - p_{i+1}) &= p_{i+2}q_{i+1} - p_{i+1}q_{i+2} \\ u = \frac{p_{i+1}q_{i+2} - p_{i+2}q_{i+1} + p_{i+2} + q_{i+1} - q_{i+2} - p_{i+1}}{q_{i+1} + p_{i+2} - q_{i+2} - p_{i+1}} &= d. \end{aligned} \quad (17)$$

Як бачимо, для розрахунку d із (10) потрібно п'ятнадцять операцій, а із (17) – десять, що спрощує розрахунки у порівнянні із застосуванням симплексу загального вигляду.

Підставимо (17) у (15), дістанемо точку K :

$$K = P + (A - C)(1 - d)p_i + (B - C)(1 - d)q_i + C. \quad (18)$$

Розглянемо двохчастинний симплекс, що зображений на рисунку 4, у якого його вершина точка $C = D_{i-1}$, а точка $B = D_{i+2}$. У цьому випадку точкові рівняння (2) та (5) будуть мати, відповідно, вигляд:

$$D_{i-1} = C; D_{i+2} = B. \quad (19)$$

При цьому точкове рівняння (15) залишиться без змін, а визначник (16) прийме вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 - u & 1 - u & 1 \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Звідкіля маємо:

$$p_{i+1} - 1 + u = 0; u = 1 - p_{i+1} = d. \quad (21)$$

Якщо для розрахунку d з використанням одночастинного симплексу необхідно було 10 операцій, то з використанням двохчастинного симплексу – одна, що значно зменшує витрати комп'ютерних та інших ресурсів. У цьому випадку точкове рівняння (18) для розрахунку точки K по формі залишається без змін, але значення d з (21).

І на сам кінець, розглянемо трьохчастинний симплекс, що зображений на рисунку 5, у якого усі точки симплексу співпадають з точками вихідної ДПК, тобто, у цьому випадку, для побудови кожної точки загушення зі зрушенням на один крок – обирається новий симплекс на точках ДПК. Маємо:

$$C = D_{i-1}, A = D_i, B = D_{i+2} . \quad (22)$$

Враховуючи (22) запишемо (6):

$$P = (C - A)u + A = Cu + Au + A = A(1 - u) + Cu . \quad (23)$$

Для точок P, D_{i+1}, D_{i+2} , враховуючи (4), (22) та (23), складемо визначник, за допомогою якого здобудемо відповідне значення параметру u .

$$\begin{vmatrix} 1-u & 0 & u \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ звідкілля } up_{i+1} - 1 + u = 0; u(p_{i+1} + 1) = 1;$$

$$u = \frac{1}{p_{i+1} + 1} = d . \quad (24)$$

Значення d із (24) підставимо у (23), отримаємо шукану точку K :

$$KP = A(1 - d) + Cd . \quad (25)$$

Обчислення точки K (25) з використанням трьохчастинного симплексу, у порівнянні з (18) та (11), є найменш витратним. Тому, у разі наявної можливості, з метою економії ресурсів, треба застосовувати, для згущення ДПК, трьохчастинні симплекси.

В усіх, розглянутих вище, випадках вершиною симплексів обиралася точка C , а дві інші – A і B утворювали симплекси. У разі, коли вершиною симплексу буде обрано точку A або точку B , необхідно буде в усі отримані раніше точкові рівняння та розрахункові формули внести, у відповідності до [1], необхідні зміни.

Висновки. Підсумовуючи, треба зауважити, що спосіб супровідних трикутників можна застосовувати для ДПК, що мають точки зламу, точки звороту, точки перегину, для ДПК, я є замкненими або незамкненими. Наявність таких можливостей способу є важливим для побудови горизонталей топографічної поверхні, які подані формалізованою геометричною моделлю або в оцифрованому вигляді.

Література

1. Балюба І.Г. Точечное исчисление [учебное пособие] / І.Г. Балюба, В.М. Надьш; под ред. Верещаги В.М. – Мелітополь: Изд-во МГПУ ім. Б.Хмельницького, 2015. – 234 с.
2. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція / В.М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2007. – 250 с.

3. Найдиш В.М. Дискретне диференціювання / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2007. – 114с.
4. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. – Мелітополь: Люкс, 2007. – 193с.
5. Верещага В.М. О поле дифпроекции эмпирической кривой / В.М. Верещага // В кн.: «Начертательная геометрия и черчение» (межвузовский сборник). – Алма-Ата, 1979. – С.63-66.
6. Бездітний А.О. Варіативне дискретне геометричне моделювання на основі геометричних співвідношень у точковому численні Балюби-Найдиша: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Андрій Олександрович Бездітний; Таврійський держ. агротехнол. ун-т. – Мелітополь, 2012. – 155 с.

СГУЩЕНИЕ ДИСКРЕТНО ЗАДАННОЙ КРИВОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОПРОВОДИТЕЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Верещага В.М., Павленко А.М.

Предложено расширение возможностей способа сопровождающих треугольников путем разработки алгоритма, который позволяет сгущать точечные ряды, имеющих точки излома, возврата, разрыва и прочее.

Ключевые слова: дискретно представлена кривая (ДПК), сгущение, точечное уравнение, треугольник, симплекс, точечное исчисление Балюбы-Найдыша (БН-исчисление).

THICKENING DISCRETELY GIVEN CURVE USING THE ACCOMPANYING TRIANGLE

V. Vereschaga, A. Pavlenko

Proposed way of supporting the empowerment of triangles by developing an algorithm that allows the thickening point series with breakpoints, turnover, gap and so on.

Keywords: discrete condensed form interpolated (DPC), thickening, point equation, triangle, simplex, BN-point calculation.