УДК 519.24(075.8)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ВИДЕ ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ

Еремеев В.С., д.т.н.,
Карпов В.Э.,
Рыжаков А.А.
Мелитопольський государственный педагогический университет им. Богдана Хмельницкого (Украина)

Предложен метод представления результатов многофакторного эксперимента в виде поверхности отклика с помощью интерполяционных полиномов. В качестве полиномов могут быть использованы многочлены Чебышева, Лагранжа или Ньютона. Разработана программа на алгоритмическом языке С для получения зависимости исследуемого параметра от одного и двух факторов. В качестве примера построена поверхность отклика, которая определяет зависимость магнитного потока в зазоре теплового преобразователя энергии ветра от параметров его конструкции.

Ключевые слова: алгоритмический язык, многофакторный эксперимент, обработка эксперимента, поверхность отклика, полином Лагранжа, программный продукт.

Постановка проблемы. Математические методы нашли широкое применение для обработки экспериментов во многих областях науки и техники [1-3]. В однофакторном эксперименте, когда изучается влияние фактора “x” на выходную величину “y”, полученные результаты представляют в виде табл. 1.

Таблица 1

Форма представления экспериментальных данных

Фактор x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
Выходная величина y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Один из способов математической обработки экспериментальных данных связан с нахождением функции отклика *f(x),* которая может быть представлена с помощью уравнения регрессии [4]:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n\ . \qquad (1)$$

Коэффициенты уравнения (1) находятся методом наименьших квадратов, а также с использованием полиномов или сплайнов. Во многих работах изучают влияние одного или нескольких факторов на некоторый параметр [4-5]. В этом случае математическая обработка состоит в нахождении поверхности отклика, определение которой аналитическими методами встречается с большими трудностями, а иногда оказывается практически невозможным. Поэтому проведение исследований в этом направлении имеет практический интерес.

Анализ последних исследований и публикаций. Использование уравнения регрессии (1) при однофакторном эксперименте во многих случаях ограничивается многочленами первой или второй степени [4], [5]. Если экспериментальные исследования проводятся с достаточно высокой точностью, то задачу построения многочлена (1) можно свести к известным методам, которые используются при интерполировании функций. Рассмотрим один из таких методов на основе использования полинома Лагранжа. Потребуем, чтобы координаты узлов полинома были заданы парами значений из табл. 1. В одномерном случае полином n-й степени имеет вид [2]:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \quad . \tag{2}$$

Полином Лагранжа в случае интерполирования функции двух переменных *f(x,y)* имеет вид [1]:

$$L(x,y)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} f_{nm} l_{nm}(x,y),\; l_{nm}(x_n,y_m)=1. \tag{3}$$

Базисные полиномы в формуле (3) определяются формулой:

$$l_{nm}(x,y)=\prod_{\substack{i=0,\,j=0\\ i\neq n,\,j\neq m}}^{i=N,\,j=M}\prod \frac{(x-x_i)}{(x_n-x_j)}\frac{(y-y_j)}{(y_m-y_j)} \quad .$$

Максимальная степень полинома $L(x,y)$ не больше $n\times m$. По определению $L(x_n,y_m)=f(x_n,y_m)$. Предполагается, что значение функции $f(x_n,y_m)$ в узловых точках x_n, y_m известно. Индексирование координат x_n, y_m, где индексы изменяются в интервалах $0\le m\le M, 0\le n\le N$, представлено в табл. 2.

На первый взгляд может показаться, что при переходе к двухфакторному эксперименту применение полинома (3) полностью разрешает задачу построения поверхности отклика. Однако это далеко не так. Формула (4) справедлива для случая размещения узловых точек в соответствие с выбранной прямоугольной сеткой, что можно обеспечить только в планированном эксперименте. Но в случае планирования эксперимента более целесообразно использовать теорию, основы которой заложены Боксом и Уилксоном [4]. Поэтому вопрос об эффективных методах при построении поверхности отклика в случае так называемого пассивного эксперимента остаётся открытым.

Таблица 2

Индексирование координат узловых точек в полиноме Лагранжа (3) с двумя переменными.

Левый индекс относится к фактору x, правый - к фактору y				
0, 0	0, 1	0, 2	...	0, N
1, 0	1, 1	1, 2	...	1, N
2, 0	2, 1	2, 2	…	2, N
…	…	…	…	…
M, 0	M, 1	M, 2	…	M, N

Формирование целей статьи. Цель настоящей статьи состоит в разработке численного алгоритма построения поверхности отклика для описания результатов однофакторного и многофакторного эксперимента с использованием одномерного полинома Лагранжа (2).

Основная часть. *Однофакторный эксперимент.* Пусть результаты однофакторного эксперимента представлены в виде табл. 1. Формула Лагранжа (2) справедлива для произвольного распределения узловых точек и, следовательно, её применение не предполагает планирования эксперимента. Для исследования точности полиномам Лагранжа нами создана программа Lagrang1(x) на алгоритмическом языке С. Тестовые испытания программы проводились для степенной функции e^x на отрезке [$0,2$] с использованием полинома пятой степени с узлами в точках $x_0=0, x_1=0.4, x_2=0.8, \ldots x_5=2.0$. В табл. 3 приведены значения полинома, вычисленные с использованием программы *Lagrang1(x)* в нескольких точках с шагом *0.333333*, и известные для этих точек точные значения функции e^x.

Таблица 3

Результаты тестирования программы *Lagrang1(x)* полиномом

X	0.000	0.333	0.667	1.000	1.333	1.667
e^x	1.00000	1.39561	1.94773	2.71828	3.79367	5.29449
$P_5(x)$	1.00000	1.39568	1.94767	2.71834	3.79360	5.29457

Из табл. 2 видно, что относительная ошибка расчётов составляет 10^{-5}. С повышением степени полинома до 10-30 относительная ошибка снижается до 10^{-17}.

*1. Многофакторный эксперимент***.** Сформулируем решение задачи построения поверхности отклика в произвольной точке многофакторного пространства без ограничения на число переменных с использованием программы *Lagrang1(x)* для одной переменной.

На первом этапе рассмотрим метод построения поверхности отклика в случае двух переменных. Считаем, что значения интерполируемой функции $f(x,y)$ в узловых точках с координатами x_n,y_m известны и равны $f(x_n,y_m)$. Требуется найти значение $f(x,y)$ в произвольной точке с координатами (x_u,y_u), которые удовлетворяют условию $x_m \le x_u \le x_{m+1}, y_n \le y_u \le y_{n+1}$. Алгоритм вычислений представим в следующем виде. Вызываем программу *Lagrang1(x)* для построения M одномерных полиномов Лагранжа $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$,… $L_M(x)$ при различных постоянных значениях y, а именно: первый из них $L_0(x)$ соответствует фиксированному значению $y = y_0$, второй $L_1(x)$ – фиксированному значению $y = y_1$, и т.д., последний $L_M(x)$ – фиксированному значению $y = y_M$. Из сказанного видно, что одномерные полиномы $L_i(x)$ строятся для узловых точек, координаты которых приведены в табл. 4.

Таблица 4

Координаты узлов для построения полиномов
$L_0(x), L_1(x), L_2(x), \ldots L_M(x)$

Номер узла n	0	1	2	…	N
Значения x_n	x_0	x_1	x_2	…	x_N
Значения $f(x_n,y_0)$ для $L_0(x)$	$f(x_0,y_0)$	$f(x_1,y_0)$	$f(x_2,y_0)$	…	$f(x_N,y_0)$
…	…	…	…	…	…
Значения $f(x_n,y_m)$ для $L_m(x)$	$f(x_0,y_m)$	$f(x_1,y_m)$	$f(x_2,y_m)$	…	$f(x_N,y_m)$
…	…	…	…	…	…
Значения $f(x_n,y_M)$ для $L_M(x)$	$f(x_0,y_M)$	$f(x_1,y_M)$	$f(x_2,y_M)$	…	$f(x_N,y_M)$

Зная полиномы $L_m(x)$, $0 \le m \le M$, рассчитываем их значения $L_m(x_u)$ в точке $x=x_u$ при различных значениях y_m и результаты заносим в табл. 5.

Таблица 5

Значения полиномов $L_m(x_u)$ при различных значениях y_m.

Номер узла m	0	1	2	…	M
Значения y_m	y_0	y_1	y_2	...	y_M
Значения $L_m(x_u)$	$L_0(x_u)$	$L_1(x_u)$	$L_2(x_u)$	…	$L_M(x_u)$

На основании данных табл. 5 строим одномерный полином *L(y)* по узловым точкам y_0, y_1, y_2,… y_M, где функция $f(x_u,y)$ равна, соответственно, $L_0(x_u)$, $L_1(x_u)$, $L_2(x_u)$,… $L_M(x_u)$. При построении *L(y)* используем программу Lagrang1(x). Далее рассчитываем значение *L(y)* в точке y_u. Полученная величина является искомым значением функции $f(x_u,y_u)$. Для проведения расчётов создана программа *Lagrang2(x,y)*.

Алгоритм обработки эксперимента с большим числом факторов выглядит так. Пусть функция *f(x,y,z)* задана в узловых точках (x_n,y_m,z_k), где целое число *k* находится в пределах $0 \le k \le K$, и равна $f(x_n,y_m,z_k)$. Требуется найти соответствующий трёхмерный полином *L(x,y,z)* и с его помощью определить значение *f(x,y,z)* в произвольной точке факторного пространства, координаты которой (x_u,y_u,z_u) принадлежат отрезкам $x_m \le x_u \le x_{m+1}, y_n \le y_u \le y_{n+1}, z_k \le z_u \le z_{k+1}$. Зафиксируем точку z_u и рассмотрим для неё двумерную поверхность $f(x,y,z_u)$. С помощью программы *Lagrang2(x,y)* можно построить соответствующий двумерный полином *L(x,y)* и рассчитать его значение в точке (x_u,y_u), которое, очевидно, и будет искомым значением трёхмерного полинома $L(x_u,y_u,z_u)$. Методом индукции легко показать, что нахождение полинома от любого числа переменных *s* может быть сведено к построению полинома степени *s-1*.

2. *Пример обработки результатов эксперимента.* Работа [6] содержит данные о зависимости магнитного потока в преобразователе энергии ветра в тепло от перемещения зубцов *x* и величины зазора *y*. В табл. 6 приведены результаты обработки этих экспериментов с использованием программы *Lagrang2(x,y)*.

Таблица 6

Вычисленные зависимости магнитного потока Ф
от перемещения зубцов якоря и зазора
с использованием функции *Lagrang2(x,y)*

	Перемещение, X							
Зазор, Z	0	5	10	15	20	25	30	35
0.3000	23.2000	23.0000	22.5000	21.5000	20.5000	19.6000	19.0000	18.8000
0.2500	22.0000	21.7000	21.0000	20.0000	19.0000	17.9000	17.1000	16.8000
0.2000	20.9000	20.6000	19.5000	18.5000	17.1000	15.8000	14.9000	14.5000
0.1500	20.1000	19.5000	18.2000	16.9000	15.3000	13.7000	12.5000	11.9000
0.1000	19.0000	18.3000	16.7000	14.9000	13.0000	11.0000	9.3000	9.0000
0.0800	18.6000	17.8000	15.8000	13.8000	11.8000	9.7000	8.0000	7.6000
0.0600	17.8000	16.9000	15.0000	12.9000	10.5000	8.3000	6.4000	5.8000
0.0400	17.4000	16.2000	13.8000	11.5000	9.1000	6.9000	5.1000	4.3000

При проведении вычислений координаты узловых точек для перемещения брались с шагом *5 мм* от $x_0=0$ до $x_7=30$*мм*. Величина зазоров *y* изменялась от $y_0=1.31$ до $y_7=10.5$*мм* с шагом *1.31мм*. Значения зазоров в табл.6 приведены в относительных единицах $\delta=y/10.5$. Результаты расчётов позволили провести анализ влияния зазора и перемещения на магнитный поток и выбрать оптимальную конструкцию магнитопровода.

Выводы. Предложен способ построения многомерной поверхности отклика с применением полинома Лагранжа от одной переменной. На языке *C* разработаны программы *Lagrang1(x)* и *Lagrang2(x,y),* которые позволяют рассчитать значение функции одной и двух переменных в произвольной точке многофакторного пространства. Программа *Lagrang1(x)* реализует вычисления в случае одной переменной по формуле (2). Программа *Lagrang2(x,y)* предназначена для расчёта значения функции двух переменных *f(x,y)*. В качестве примера проведена математическая обработка экспериментов [6], где исследовалась зависимость магнитного потока от перемещения зубцов якоря и величины зазора в магнитном преобразователе энергии ветра. Полученные данные могут применяться для построения поверхностей отклика в многофакторных экспериментах с использованием других полиномов, например, Ньютона или Чебышева.

Литература

1. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П.Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Бином, 2001. – С. 363–375.
3. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – Москва: «ДМК Пресс», 2009. – 624 с.
4. Єремєєв В. С. Теорія планування та обробки експерименту / В.С. Єремєєв , Г. М. Ракович // Навчальний посібник. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2012. – 92с.
5. Шашков В.Б. Обработка экспериментальных данных и построение эмпирических формул. Курс лекций: Учебное пособие. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. – 150 с.
6. Жарков В.Я. Аналіз динамічних навантажень індукційних вітротеплових установок / В.Я Жарков, А.В. Жарков // Вісник ХНТУСГ. – Вип. 37 “Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України”. – т.2. – Харків: ХНТУСГ, 2005. – С.79-83.

ПОДАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ У ВИГЛЯДІ ПОВЕРХНІ ВІДГУКУ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ

Єремєєв В.С., Карпов В.Э, Рижаков А.А.

Запропоновано метод подання результатів багатофакторного експерименту у вигляді поверхні відгуку за допомогою інтерполяційних поліномів. Як поліномів можуть бути використані многочлени Чебишева, Лагранжа або Ньютона. Розроблена програма на алгоритмічній мові С для обробки результатів експерименту в залежності від одного і двох факторів. В якості прикладу побудована поверхня відгуку, яка визначає залежність магнітного потоку в зазорі теплового перетворювача енергії вітру від параметрів його конструкції.

Ключові слова: алгоритмічна мова, багатофакторний експеримент, обробка експерименту, поверхня відгуку, поліном Лагранжа, програмний продукт.

PRESENTATION OF EXPERIMENTAL DATA IN THE FORM OF THE RESPONSE SURFACE USING INTERPOLATION POLYNOMIALS

V. Eremeev, V. Karpov,V. Ryzhenko

The method of presenting the results of multifactorial experiment in the form of the response surface using interpolation polynomials. As polynomials can be used Chebyshev polynomials, Lagrange or Newton. Developed the program in algorithmic language C for processing the results of the experiment based on one and two factors. As an example, the surface response, which determines the dependence of the magnetic flux in the gap of the heat of the wind energy Converter from its construction.

Keywords: algorithmic language, multiple-factor experiment, processing of the experiment, the Lagrange polynomial, the software product, the surface response.