УДК 514.18

КОНСТРУЮВАННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ НА ОСНОВІ ПОЛЯРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)
Захарова Т.М., к.т.н.
Сумський національний аграрний університет (Україна)

Сформульовано підхід до конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, на основі задання кривої в полярній системі координат. За допомогою розробленого підходу отримано узагальнене натуральне та параметричні рівняння, які описують певний спектр кривих. Візуалізовано деякі з кривих, отримані за допомогою запропонованого підходу. Наведено узагальнене натуральне рівняння отриманих кривих.

Ключові слова: плоска крива, натуральний параметр, параметричні рівняння, натуральне рівняння, довжина дуги.

Постановка проблеми. Криві лінії, описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра, знаходять широке застосування у техніці. Зокрема, оперування кривою засобами диференціальної геометрії потребує опису кривої у функції довжини власної дуги. Механічні властивості кривих ліній застосовуються при описі руху частинки по поверхні під дією сили власної ваги при відсутності опору руху [1]; при проектуванні перехідних ліній на заокругленнях залізничних колій [2]; в зубчатих зачепленнях [3] тощо.

Не зважаючи на широке застосування кривих ліній, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, в техніці, у науковій літературі такі криві та способи їх конструювання досить обмежені.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Науковцями розробляються різноманітні підходи до конструювання кривих у функції натурального параметра. Так, у праці [4] запропоновано спосіб конструювання кривих, описаних у такому вигляді, на основі плоскої ізометричної сітки, у праці [5] – за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої, а у праці [6] – на основі кулі одиничного радіуса. Проте проблеми прикладного застосування кривих ліній на основі натуральних параметрів зумовлюють необхідність поповнення існуючих способів конструювання таких кривих.

Формулювання цілей статті. Поповнити клас плоских кривих у функції натурального параметра новими кривими із розробкою підходу до їх конструювання.

Основна частина. У полярній системі координат крива задається залежностями радіус-вектора ρ від кута його повороту φ: $\rho=\rho(\varphi)$. У випадку, якщо обидва ці параметри є функціями довжини дуги s кривої, тобто $\rho=\rho(s)$ і $\varphi=\varphi(s)$, параметричні рівняння кривої матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi; \\ y &= \rho\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

При умові, що незалежною змінною у рівняннях (1) є довжина дуги s, обов'язково повинна виконуватися рівність:

$$x'^2 + y'^2 = 1. \tag{2}$$

Знайдемо перші похідні рівнянь (1) по параметру s:

$$\begin{aligned} x' &= \rho'\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi; \\ y' &= \rho'\sin\varphi + \rho\varphi'\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Підстановкою (3) в (2) отримаємо:

$$\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2 = 1. \tag{4}$$

Розв'яжемо отримане рівняння (4) відносно $\varphi=\varphi(s)$:

$$\varphi = \int \frac{\sqrt{1-\rho'^2}}{\rho} ds. \tag{5}$$

Отже, якщо підібрати таку залежність $\rho=\rho(s)$, яка дозволить інтегрування виразу (5), можна отримати криву у функції натурального параметра.

Розглянемо один із можливих прикладів конструювання плоскої кривої у функції натурального параметра за допомогою запропонованого підходу. Приймемо залежність $\rho=\rho(s)$ у наступному вигляді:

$$\rho = a^s, \tag{6}$$

де a – стала величина.

Підстановкою прийнятої залежності (6) у формулу (5) отримуємо:

$$\varphi = \int \sqrt{\frac{1-(a^s)'^2}{a^s}} ds = -\arcsin(a^s \ln a) - \frac{\sqrt{1-a^{2s}\ln^2 a}}{a^s \ln a}. \tag{7}$$

Підставивши отримане рівняння (7) і прийняту залежність (6) у параметричні рівняння кривої (1) отримаємо плоску криву у функції довжини власної дуги. Параметричні рівняння отриманої кривої у даній статті не наведено через їх досить громіздкий вигляд.

Дослідним шляхом було встановлено, що за цими рівняннями при різних значеннях сталої *a* можна отримати деякі спіралі. Для їх аналізу знайдемо кривину отриманої кривої за відомою формулою $k = \sqrt{x'' + y''}$. Диференціюємо вирази (3), щоб отримати другі похідні:

$$x'' = \left(\rho'' - \rho\varphi'^2\right)\cos\varphi - \left(\rho\varphi'' + 2\rho'\varphi'\right)\sin\varphi;$$
$$y'' = \left(\rho'' - \rho\varphi'^2\right)\sin\varphi + \left(\rho\varphi'' + 2\rho'\varphi'\right)\cos\varphi. \qquad (8)$$

Запишемо першу і другу похідну виразу (5):

$$\varphi' = \frac{\sqrt{1-\rho'^2}}{\rho}; \qquad \varphi'' = \frac{\rho'\left(\rho\rho'' - \rho'^2 + 1\right)}{\rho^2\sqrt{1-\rho'^2}}. \qquad (9)$$

Підставивши вирази (9) у (8), і після цього вирази (8) у формулу $k = \sqrt{x'' + y''}$, після спрощень остаточно одержимо:

$$k = \frac{\rho\rho'' + \rho'^2 - 1}{\rho\sqrt{1-\rho'^2}}. \qquad (10)$$

Підставивши залежність (6) $\rho=a^s$ та її похідні $\rho'=a^s\ln a$, $\rho''=a^s\ln^2 a$ у формулу (10), одержимо вираз кривини (натуральне рівняння) кривої, заданої в полярній системі залежностями (6) і (7):

$$k = \frac{1-2a^{2s}\ln^2 a}{a^s\sqrt{1-a^{2s}\ln^2 a}}. \qquad (11)$$

Наведемо деякі з кривих, які описуються натуральним рівнянням (11). Криві, отримані при значеннях сталої *a = 2/3* і *a = 3/2* наведено на рисунках 1 і 2. Дані криві симетричні відносно осі *Ox*.

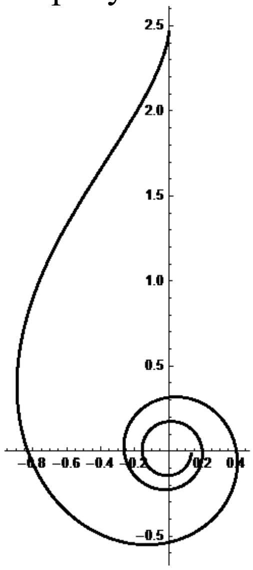

Рис. 1. Крива, яка описується натуральним рівнянням (11), при значенні сталої *a = 2/3*

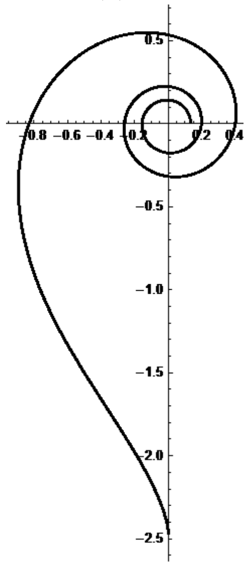

Рис. 2. Крива, яка описується натуральним рівнянням (11), при значенні сталої *a = 3/2*

В околі одиниці криві приймають вигляд, як на рисунках 3 і 4. При інших значеннях сталої a крива приймає вигляд, близький до наведених. Наприклад, при $a = 0{,}5$ крива має вигляд, як на рисунку 1, а при $a = 2$ – як на рисунку 2.

При $a = 0$ та при $a = 1$ криві не існують.

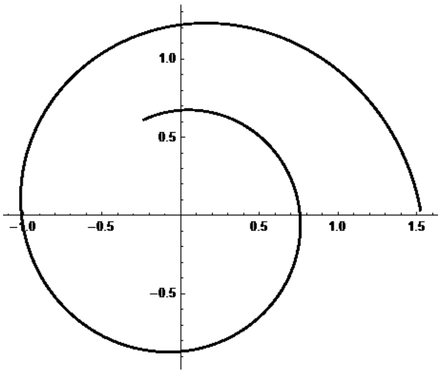

Рис. 3. Крива, яка описується натуральним рівнянням (11), при значенні сталої $a = 0{,}9$

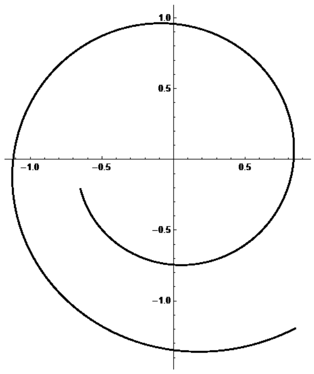

Рис. 4. Крива, яка описується натуральним рівнянням (11), при значенні сталої $a = 1{,}1$

Отже, натуральне рівняння (11) описує певний спектр кривих у функції довжини власної дуги.

Висновки. Розроблений підхід та отримані за його допомогою криві у натуральній параметризації дозволяють розширити клас кривих, описаних у такому вигляді. До того ж наведені у статті криві не вичерпують формотворчі можливості запропонованого підходу.

Література

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – Киев: Изд-во Укр. акад. сельск. наук, 1960. – 283 с.
2. Босов А.А. Рациональные переходные кривые железнодорожного транспорта / А. А. Босов, В. В. Лагута // Математическое моделирование в задачах железнодорожного транспорта: Межвуз. сб. научн. тр. ДИИТ. – Днепропетровск, 1988. – С. 4 – 11.
3. Теория механизмов и механика машин / [Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К., Тимофеев Г.А., Никоноров В.А.]; Колесников К. С. – Издание четвёртое, исправленное и дополненное. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – Т. 5. – 664 с.
4. Пилипака С.Ф. Конструювання кривих у функції натурального параметра на основі плоских ізометричних сіток / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: «Прикл. геометрія та інж. графіка». – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4, т. 50. – С. 29 – 35.

5. Захарова Т. М. Конструювання плоских кривих, що описуються рівняннями у функції довжини дуги, за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої / Т. М. Захарова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4, т. 53. – С. 57–65.
6. Захарова Т.М. Конструювання просторових кривих у функції натурального параметра на основі кулі одиничного радіуса / Т. М. Захарова // Вісник Сумського національного аграрного університету: науковий журнал. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів». — Суми: СНАУ, 2016 р. – Вип. 3 (28). – С. 204–209.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ В НАТУРАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ НА ОСНОВАНИИ ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Пилипака С.Ф., Захарова Т.Н.

Сформулирован подход к конструированию плоских кривых, описанных параметрическими уравнениями в функции натурального параметра, на основе задания кривой в полярной системе координат. С помощью разработанного подхода получено обобщенное натуральное и параметрические уравнения, которые описывают определенный спектр кривых. Визуализированы некоторые из кривых, полученные с помощью предложенного подхода. Приведено обобщенное натуральное уравнение полученных кривых.

Ключевые слова: плоская кривая, натуральный параметр, параметрические уравнения, натуральное уравнение, длина дуги.

CONSTRUCTING OF FLAT CURVES IN NATURAL PARAMETRIZATION ON BASE OF POLAR SYSTEM OF COORDINATES

Pylypaka S., Zakharova T.

An approach to the constructing of flat curves, described by parametric equations in the function of the natural parameter, on the basis of the polar coordinate system is formulated in the article. Natural and parametric equations, which describe certain spectrum of curves, are received by the developed approach. Some of the curves obtained using the proposed approach are visualized. The generalized natural equation of obtained flat curves is received.

Key words: flat curve, natural parameter, parametrical equations, natural equation, length of arc.