УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ PH-КРИВИХ У ВИГЛЯДІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО СПЛАЙНУ

Аушева Н.М., д.т.н.,
Мельник О.В.,
Гомов В.В.
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (Україна)

Робота висвітлює спосіб побудови просторових кривих за годографом Піфагора (PH-кривих) у вигляді фундаментального сплайну. Знайдено умови для визначення точок сплайну для кубічних кривих. Наведено приклади кривих.

Ключові слова: фундаментальний сплайн, сплайн Катмалл-Рома, PH-крива, крива за годографом Піфагора.

Постановка проблеми. Для завдання кривої з конкретною довжиною дуги доцільно використовувати клас кривих за годографом Піфагора (PH-криві) [1, 2]. Довжина дуги таких кривих може бути розрахована без чисельних методів, формула для обчислення має вигляд полінома. У багатьох системах комп'ютерної графіки для побудови кривих та поверхонь застосовується інформація точкового ряду, тому актуальним питання є дослідження представлення кривих за годографом Піфагора у вигляді фундаментального сплайну [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Професор Ріда Фароуки та його співавтори [1, 2] досліджують застосування кривих за годографом Піфагора (PH) у геометричному дизайні, графіці, плануванні та керуванні рухом. Розглядається теорія, алгоритми та використання плоских та просторових PH-кривих. Робота [4] направлена на дослідження та побудову ізотропної кривої за годографом Піфагора у вигляді кривої Без'є третього порядку. В подальшому [5] ця крива використовується для моделювання плоскої ортогональної та ізотермічної сітки. Автором роботи [6] досліджується побудова ізотропного просторового фундаментального сплайну, знайдені умови ізотропності.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є розробка способу конструювання PH-кривої у вигляді фундаментального сплайну.

Основна частина. Плоска крива $r(u)=[x(u) \quad y(u)]$ буде кривою за годографом Піфагора (PH-крива) тоді і тільки тоді, коли годограф (похідні) від $r(u)$ пов'язані наступним співвідношенням [2]:

$$\left|r'(u)\right|^2 = x'(u)^2 + y'(u)^2 = \sigma(u)^2 \qquad (1)$$

для деякого многочлена $\sigma(u)$.

Для виразу (1) були знайдені умови, за якими поліноміальна крива може бути PH-кривою:

$$\begin{aligned} x'(u) &= w(u)(f(u)^2 - v(u)^2), \\ y'(u) &= 2w(u)f(u)v(u), \end{aligned} \qquad (2)$$

де $f(u)$, $v(u)$, $w(u)$ - поліноми.

Якщо підставити значення (2) у (1) за умови $w(u)=1$, тоді будемо мати:

$$x'(u)^2 + y'(u)^2 = (f(u)^2 + v(u)^2)^2. \qquad (3)$$

Знайдемо залежності для плоского фундаментального сплайна такі, щоб виконувалась умова (3), тобто крива перетворилась на криву за годографом Піфагора, але визначалась на основі значень точкового каркасу.

Для кубічної кривої будемо шукати $f(u)$ та $v(u)$ у вигляді лінійних поліномів:

$$\begin{aligned} f(u) &= a_0 + a_1 u, \\ v(u) &= b_0 + b_1 u, \end{aligned} \qquad (4)$$

де $a_0,\ a_1, b_0, b_1$ - деякі числа.

Ділянка фундаментального сплайну задається положенням чотирьох точок заданого точкового каркасу, а дотичні в кожній точці обчислюються за координатами двох сусідніх точок. Нехай фундаментальний сплайн задається у вигляді [3]:

$$\begin{aligned} P(u) = {} & [(P_{k+1} - P_{k-1})(u^3 - 2u^2 + u) + (P_{k+2} - P_k)(u^3 - u^2)]s + \\ & + [P_k(2u^3 - 3u^2 + 1) + P_{k+1}(-2u^3 + 3u^2)], \end{aligned} \qquad (5)$$

де $P_{k-1},\ P_k,\ P_{k+1},\ P_{k+2}$ - точки заданого точкового каркасу (рис.1),

$s = \dfrac{1-t}{2}$, t - параметр натягу сплайну. Якщо $t=0$, маємо різновид фундаментального сплайну, а саме сплайн Катмалл-Рома (Catmull-Rom slines).

Візьмемо похідну від виразу (5):

$$\begin{aligned} P'(u) = {} & (P_{k+1} - P_{k-1})s + 2u[-2s(P_{k+1} - P_{k-1}) - s(P_{k+2} - P_k) + 3(P_{k+1} - \\ & - P_k)] + 3u^2[s(P_{k+1} - P_{k-1}) + s(P_{k+2} - P_k) - 2(P_{k+1} - P_k)]. \end{aligned} \qquad (6)$$

Підставимо значення $f(u)$, $v(u)$ з рівняння (4) в умови для PH-кривої (2). Отримаємо :

$$\begin{aligned} x'(u) &= a_0^{\ 2} - b_0^{\ 2} + 2u(a_0 a_1 - b_0 b_1) + u^2(a_1^{\ 2} - b_1^{\ 2}), \\ y'(u) &= 2a_0 b_0 + 2u(a_0 b_1 - a_1 b_0) + 2u^2 a_1 b_1. \end{aligned} \qquad (7)$$

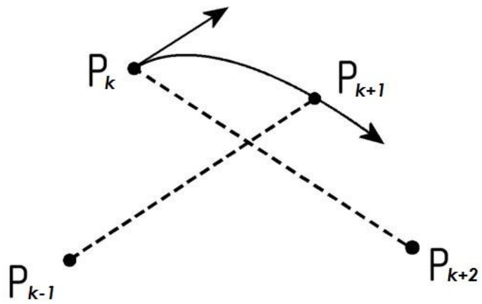

Рис. 1. Формування фундаментального сплайну

Будемо задавати координати точки $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$. Для знаходження координат точок $P_k(x_k, y_k)$, $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$, $P_{k+2}(x_{k+2}, y_{k+2})$ прирівняємо коефіцієнти при відповідних множниках з рівнянь (6) і (7). Одержимо систему рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&a_0^2 - b_0^2 = s(x_{k+1} - x_{k-1}),\\
&a_0 a_1 - b_0 b_1 = 2s x_{k-1} + (s-3)x_k + (3-2s)x_{k+1} - s x_{k+2},\\
&a_1^2 - b_1^2 = 3(s x_{k+2} + (s-2)x_{k+1} + (2-s)x_k - s x_{k-1}),\\
&2a_0 b_0 = s(y_{k+1} - y_{k-1}),\\
&a_0 b_1 + a_1 b_0 = 2s y_{k-1} + (s-3)y_k + (3-2s)y_{k+1} - s y_{k+2},\\
&2a_1 b_1 = 3(s y_{k+2} + (s-2)y_{k+1} + (2-s)y_k - s y_{k-1}).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Розв'язуючи систему рівнянь (8) отримаємо координати точок заданого точкового каркасу:

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} = \frac{a_0^2 - b_0^2}{s} + x_{k-1},\\
&y_{k+1} = \frac{2a_0 b_0}{s} + y_{k-1},\\
&x_k = x_{k+1}(1-s) + s x_{k-1} - a_0 a_1 + b_0 b_1 - \frac{a_1^2 - b_1^2}{3},\\
&y_k = y_{k+1}(1-s) + s y_{k-1} - a_0 b_1 - a_1 b_0 - \frac{2a_1 b_1}{3},\\
&x_{k+2} = \frac{a_1^2 - b_1^2}{3s} - (1 - \frac{2}{s})x_{k+1} - (\frac{2}{s} - 1)x_k + x_{k-1},\\
&y_{k+2} = \frac{2a_1 b_1}{3s} - (1 - \frac{2}{s})y_{k+1} - (\frac{2}{s} - 1)y_k + y_{k-1}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Приклад 1. Побудуємо сплайн Катмалл-Рома 3-го порядку за годографом Піфагора (рис. 2). Задамо: $f(u)=2+3u, v(u)=-2-u$, $P_{k-1}=(1,1)$.

На основі отриманих рівнянь (9) знайдемо координати всіх точок для заданого точкового каркасу:

$P_k(x_k, y_k)=(-3,3)$; $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})=(1,-15)$; $P_{k+2}(x_{k+2}, y_{k+2})=(13,-57)$.

Тепер знайдемо довжину сплайну Катмалл-Рома 3-го порядку за годографом Піфагора. Для цього скористаємось виразом (3):

$$L=\int_0^1 \sqrt{x'(u)^2+y'(u)^2}\,du=\int_0^1 \sqrt{(f(u)^2+v(u)^2)^2}\,du=\int_0^1 (f(u)^2+v(t)^2)\,du \qquad (10)$$

Як видно з умови (10), дане подання кривої дозволяє позбутися кореня, тобто одержати точне значення інтеграла. Для фундаментального сплайну третього порядку будемо мати:

$$\begin{aligned} L&=su(x_{k+1}-x_{k-1})+u^2(2sx_{k-1}+(s-3)x_k+(3-2s)x_{k+1}-sx_{k+2}) \\ &+u^3(sx_{k+2}+(s-2)x_{k+1}+(2-s)x_k-sx_{k-1}). \end{aligned} \qquad (11)$$

Розрахуємо довжину сплайну Катмалл-Рома для прикладу 1. Для цього підставим у вираз (11) значення $s=1/2$. Будемо мати: $L=4$.

Приклад 2. Побудуємо сплайн Катмалл-Рома 3-го порядку за годографом Піфагора на основі заданих точок каркасу $P_{k-1}=(1,1)$, $P_k=(-7,10/3)$, $P_{k+1}=(-5,9)$ (рис. 3).

На основі рівнянь (8) та чисельних методів знайдемо коефіцієнти a_0, a_1, b_0, b_1 для лінійних поліномів: $b_0=2$; $a_0=1$; $b_1=-1$; $a_1=2$.

Підставимо отримані коефіцієнти в (9) для знаходження координат останньої точки каркасу. Отримаємо $P_{k+2}(x_{k+2}, y_{k+2})=(9,15.3333)$. Довжина сплайну $L=2$.

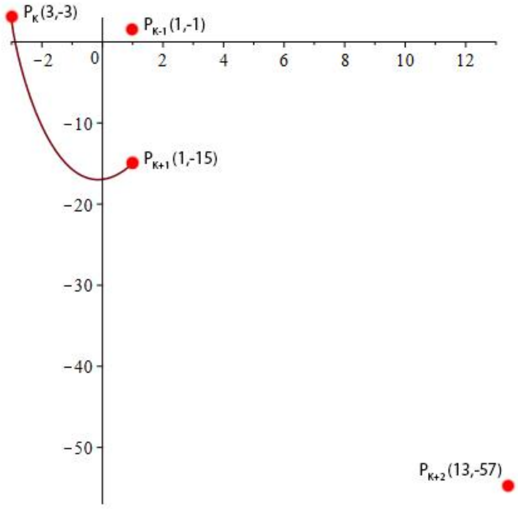

Рис. 2. Сплайн за годографом Піфагора на основі заданих лінійних функцій

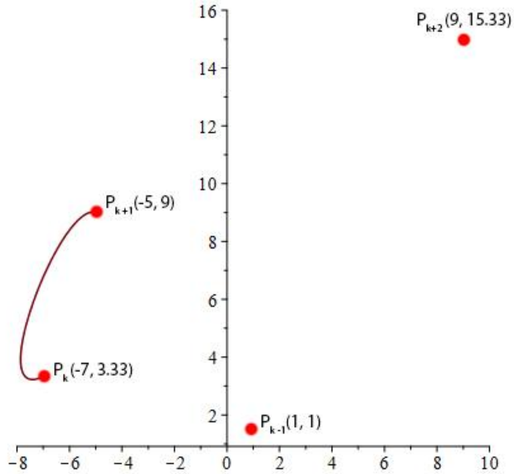

Рис. 3. Сплайн за годографом Піфагора на основі заданих точок

Висновки. В результаті виконаних досліджень було запропоновано будувати криву за годографом Піфагора у вигляді фундаментального сплайну. Довжину такої кривої можна визначати без застосування апроксимаційних методів. Було розглянуто два підходи до формування фундаментального сплайну: перший - через завдання коефіцієнтів лінійних функцій, другий – через завдання точок сплайну.

Література

1. Farouki R.T. Pythagorean hodographs [Text] / R.T. Farouki, T. Sakkalis // IBM J. Res. Develop. – № 34(5). – 1990. – P.736–752.
2. Farouki R.T. Pythagorean–Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable [Text]/ R.T. Farouki. – Springer, 2008. –728 p.
3. Херн Д. Компьютерная графика и стандарт OpenGl [Текст] / Д. Херн, Паулин М. Бейкер; [3–е издание.: пер. с англ.] – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1168 с.
4. Аушева Н. М. Конструювання плоскої ізотропної кривої на основі рівняння кривої за годографом Піфагора [Текст] / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Технічна естетика і дизайн”. – Вип.12. – К.: КНУБА, 2013 р. – С.7–11.
5. Аушева Н. М. Моделювання плоских сіток на основі ізотропних кривих за годографом Піфагора [Текст] / Н.М. Аушева // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – Вип.48. – Луцьк: ЛНТУ, 2015 р. – С.13-17.

6. Аушева Н. М. Ізотропні фундаментальні сплайни [Текст] / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип.6. – С.3–7.

МОДЕЛИРОВАНИЕ PH-КРИВЫХ НА ОСНОВЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО СПЛАЙНА

Аушева Н.Н, Мельник О.В., Гомов В.В.

В работе рассматривается способ построения пространственных кривых по годографу Пифагора (PH-кривые) на основе фундаментального сплайна. Найдены условия для определения точек фундаментального сплайна. Приведены примеры кривых.

Ключевые слова: фундаментальный сплайн, сплайн Катмалл-Рома, PH-кривая, кривая по годографу Пифагора.

MODELING OF PH-CURVES IN THE FORM OF THE BASIC SPLINE

Ausheva N., Melnyk O., Homov V.

The work elucidates the way of constructing Pythagorean-Hodograph curves (PH-curves) in the form of the basic spline. The conditions for determining points of the cubic spline curves are found. The examples of curves are given.

Keywords: basic spline, Catmull–Rom spline, PH-curve, Pythagorean-Hodograph Curves.