

УДК 514.18

ПЛОСКІ КРИВІ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА НА ОСНОВІ ГОДОГРАФА ПІФАГОРА

Захарова Т.М., к.т.н.

Сумський національний аграрний університет (Україна),

Кремець Т.С., к.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування
України (м. Київ, Україна)*

Робота висвітлює спосіб конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, за допомогою годографа Піфагора. У статті отримано ряд плоских кривих з наведенням їх параметричних та натурального рівняння, а також візуалізовано отримані результати.

Ключові слова: плоска крива, натуральний параметр, довжина дуги, годограф Піфагора, кривина.

Постановка проблеми. Криві, описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра (довжини дуги) знаходять широке застосування при вирішенні багатьох прикладних задач: при описі руху матеріальної точки по заданій траєкторії, у задачах згинання листового матеріалу тощо. Проте далеко не всі криві можна задати у такому вигляді. Перепоною є інтегрування підкореневого виразу довжини дуги, яке досить рідко є можливим. У інших випадках для отримання натурального рівняння кривої виникає необхідність застосовувати чисельні методи. Це і обумовлює потребу у розширенні способів конструювання плоских кривих у натуральній параметризації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Науковцями розробляються різні способи конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра. Так, наприклад, у праці [1] для цього використовуються плоскі ізометричні сітки, а у праці [2] – супровідний тригранник Френе. Проте, існує клас кривих за годографом Піфагора [3], вираз довжини дуги яких є поліномом та дозволяє уникнути необхідності застосування чисельних методів для відшукування натуральних рівнянь кривих. Професор Аушева Н.М. у своїй праці [4] застосовує годограф Піфагора для побудови ізотропних просторових кривих. Для цього використовуються кватерніони, які лежать в чотиривимірній площині у просторі R^4 . Однак, годограф Піфагора можна застосувати і для

конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є формулювання способу конструювання плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, за допомогою годографа Піфагора та розширення на його основі класу таких кривих у натуральній параметризації.

Основна частина. У праці [3] зазначено, що для плоскої кривої похідні параметричних рівнянь мають вигляд:

$$x' = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}; \quad y' = \frac{2uv}{u^2 + v^2}, \quad (1)$$

де u і v – довільні залежності від довжини дуги s .

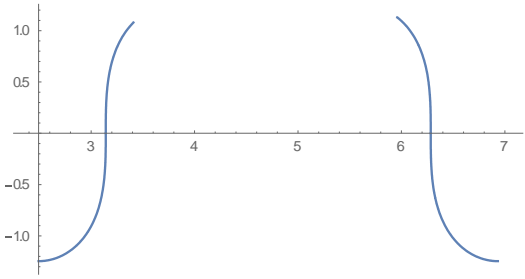
Можна переконатися, що наведені формули (1) справедливі для будь-яких залежностей $u = u(s)$ і $v = v(s)$, так як для них у будь-якому випадку справджується рівність $x'^2 + y'^2 = 1$. Однак самі параметричні рівняння плоскої кривої отримати не так просто. Для цього потрібно проінтегрувати вирази (1), тобто отримати наступні інтеграли:

$$x(s) = \int \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} ds; \quad y(s) = \int \frac{2uv}{u^2 + v^2} ds. \quad (2)$$

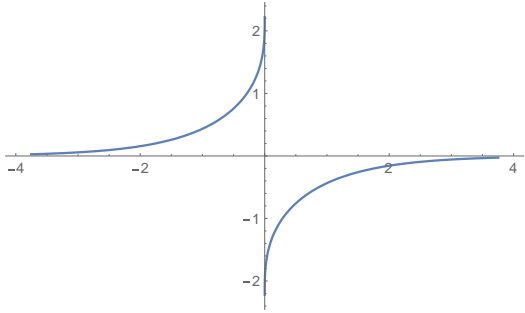
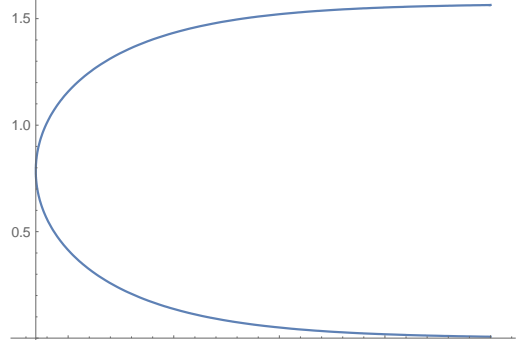
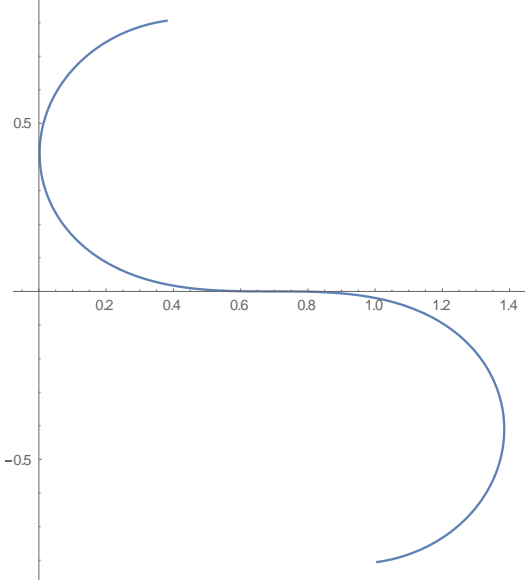
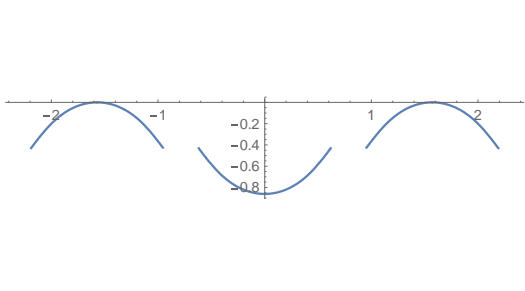
Отже, при такому підборі залежностей $u = u(s)$ і $v = v(s)$, яке дозволить інтегрування виразів (1), з'являється можливість отримати плоску криву у натуральній параметризації.

У таблиці 1 наведено отримані за допомогою запропонованого підходу криві з наведенням їх параметричних та натурального рівнянь, а також прийнятих для їх відшукування залежностей. Для деяких кривих параметричні рівняння у функції натурального параметра не наведено через їх громіздкий вигляд.

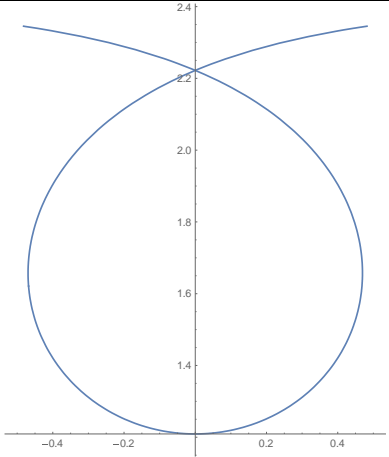
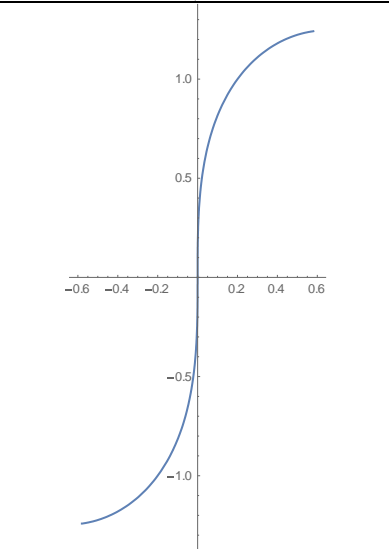
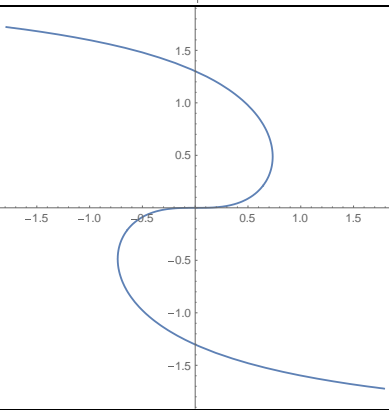
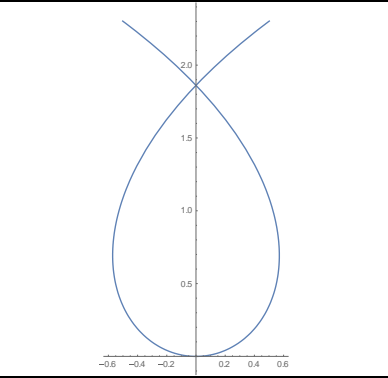
Таблиця 1

Залежності $u = u(s)$ і $v = v(s)$	Візуалізація кривої	Параметричні рівняння у функції натурального параметра та натуральне рівняння кривої
$u = \sin s;$ $v = \operatorname{tg} s.$		$x = s - \sqrt{2} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} s}{\sqrt{2}}.$ $y = \sqrt{2} \operatorname{Arctg} \frac{\sin s}{\sqrt{2}}$ $k = 4 \frac{\sin s}{3 + \cos 2s}$

Продовження таблиці 1

$u = \sinh s;$ $v = \operatorname{tgh} s.$		$x = s - \sqrt{2} \operatorname{Arctgh} \frac{\operatorname{tgh} s}{\sqrt{2}}.$ $y = -\sqrt{2} \operatorname{Arctgh} \frac{\sqrt{2}}{\sinh s}$ $k = 4 \frac{\sinh s}{3 + \cosh 2s}$
$u = e^s;$ $v = \frac{1}{e^s}.$		$x = -s + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{4s})$ $y = \operatorname{Arctg} e^{2s}$ $k = 4 \frac{e^{2s}}{1 + e^{4s}}$
$u = \sin s;$ $v = \frac{1}{\operatorname{tgs} s}.$		$k = 4 \frac{5 \sin s + \sin 3s}{7 + \cos 4s}.$
$u = \sin s;$ $v = \frac{1}{\cos s}.$		$x = s - \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{tg} 2s \right)$ $y = -\frac{2}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{Arctgh} \frac{1-2i \operatorname{tgs}}{\sqrt{5}} + \operatorname{Arctgh} \frac{1+2i \operatorname{tgs}}{\sqrt{5}} \right)$ $k = 16 \frac{\cos 2s}{\cos 4s - 9}.$

Продовження таблиці 1

$u = \sinh s;$ $v = \frac{1}{\cosh s}.$		$x = s - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tgh} 2s\right)$ $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1-2i \operatorname{tgh} s}{\sqrt{3}} + \operatorname{Arctg} \frac{1+2i \operatorname{tgh} s}{\sqrt{3}} \right)$ $k = 16 \frac{\cosh 2s}{\cosh 4s + 7}.$
$u = \frac{1}{\sin s};$ $v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}.$		$x = \sqrt{2} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} s}{\sqrt{2}} - s$ $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\ln(\sqrt{2} - \sin s) + \ln(\sqrt{2} + \sin s))$ $k = \frac{4 \sin s}{3 + \cos 2s}$
$u = \frac{1}{s};$ $v = s.$		$k = \frac{4s}{1+s^4}$
$u = s^2;$ $v = s.$		$x = s - 2 \operatorname{Arctg} s$ $y = \ln(1+s^2)$ $k = \frac{2}{1+s^2}$

Окрім того, за допомогою запропонованого підходу вдалося відшукати ще дві специфічні криві, а саме:

плоска крива сталої середньої уявної кривини:

$$u = \sin(is); \quad v = \cos(is).$$

$$x = -\frac{1}{2} \sinh 2s;$$

$$y = i \cosh^2 s;$$

$$k = 2i.$$

та плоска крива змінної уявної кривини:

$$u = \operatorname{sech}(is); \quad v = \operatorname{tgh}(is).$$

$$x = 2tgs - s;$$

$$y = 2i \operatorname{sec} s;$$

$$k = 2i \operatorname{sec} s.$$

Висновки. Запропонований підхід дає можливість поповнювати клас плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, новими кривими. Пошук таких кривих може бути продовжено підбором належних залежностей $u=u(s)$ і $v=v(s)$.

Література

1. Пилипака С.Ф. Конструювання кривих у функції натурального параметра на основі плоских ізометричних сіток / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 50. – С. 29 – 35.
2. Пилипака С.Ф. Конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4, т.55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 176 – 184.
3. Farouki R.T. Pathagorean hodographs [Text] / R.T. Farouki, T. Sakkalis // IBM J.Res.Develop. – № 34 (5). – 1990. – P. 736 – 752.
4. Аушева Н.М. Моделювання сім'ї ізотропних просторових РН-кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною / Н.М. Аушева // Збірник наукових праць «Сучасні проблеми моделювання». – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2016. – Вип. 7. – С. 3 – 9.

**ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ В ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНОГО
ПАРАМЕТРА
НА ОСНОВАНИИ ГОДОГРАФА ПИФАГОРА**

Захарова Т.Н., Кремец Т.С.

В работе рассматривается способ конструирования плоских кривых, описанных параметрическими уравнениями в функции натурального параметра, с помощью годографа Пифагора. В статье получено ряд плоских кривых с приведением их параметрических и натурального уравнения, а также визуализировано полученные результаты.

Ключевые слова: плоская кривая, натуральный параметр, длина дуги, годограф Пифагора, кривизна.

**FLAT CURVES IN THE FUNCTION OF NATURAL
PARAMETER
ON THE BASIS OF THE PYTHAGOREAN HODOGRAPH**

Zakharova T., Kremets T.

The paper considers a method for constructing plane curves described by parametric equations in the function of a natural parameter using the Pythagoras hodograph. In this paper we obtain a series of plane curves with reduction of their parametric and natural equations, and also visualize the obtained results.

Key words: flat curve, natural parameter, arc length, the Pythagorean hodograph, curvature.