

УДК 515.2

## **ВИКОРИСТАННЯ ЗОВНІШНІХ ЗУСИЛЬ У СГМ ЯК ФОРМОУТВОРЮЮЧИХ ЧИННИКІВ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ КАРКАСНИХ ПОВЕРХОНЬ**

Ковальов С.М., д.т.н.,  
Ботвіновська С.І., к.т.н. \*,  
Золотова А.В., к.т.н.

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
(Україна)*

*Представлено приклад дискретного геометричного моделювання каркасної поверхні із заданими естетичними властивостями за допомогою СГМ. Показаний алгоритм моделювання оболонки з довільно заданими крайовими умовами, коли зовнішні зусилля у вузлах сітки не пов'язані із власною вагою оболонки, а розглядаються як формоутворюючі чинники.*

*Ключові слова: геометричне моделювання, зовнішнє формоутворююче навантаження, дискретний каркас, статико-геометричний метод, технічний дизайн.*

**Постановка проблеми.** Одним з найперспективніших напрямів наукових досліджень у моделюванні криволінійних поверхонь, є формоутворення дискретних моделей поверхонь, урізноманітнення їх форм, та подальша можливість варіювання цих форм. Кожний дизайнер або архітектор прагне змоделювати та отримати найбільш досконалу поверхню майбутнього об'єкту, яка б відповідала всім поставленим вихідним умовам.

Як правило, такі поверхні не можна утворити каркасно-параметричним або каркасно-кінематичним способом через те, що в основі їх утворення знаходяться не геометричні, а фізичні закономірності. В такому випадку можна використати один з методів дискретного геометричного моделювання.

В даній роботі пропонується звернутись до методу скінчених різниць, наочним трактуванням якого виступає так званий статико-геометричний метод (СГМ).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Збереження урізноманітних властивостей відомих поверхонь і перенесення цих властивостей на поверхні, що моделюються – це один із шляхів

---

\* Науковий консультант – д.т.н., професор Ковальов С.М.

отримання нових форм у дизайні та архітектурі. Цим питанням присвячено роботу [1]. В ній проведено аналіз властивостей притаманних різним простим поверхням та наведено приклад формування дискретного каркасу поверхні за заданими параметрами, із збереженням композиційних властивості поверхні прообразу.

Моделюванню дискретного каркасу поверхні округлої форми, на довільно заданому опорному контурі за допомогою перетворення інверсії в просторі, присвячено роботу [2]. І хоча залучення перетворення інверсії у просторі дозволило вдосконалити і підтвердити ефективність використання СГМ, такий підхід не є простим і вимагає від дизайнера спеціальної підготовки. В роботі [3] була виконана спроба розширити формоутворюючі можливості СГМ за рахунок використання в якості формоутворюючого чинника, зовнішнього навантаження прикладеного до вузлів сітки. Основною умовою в цій роботі було збереження лінійності системи рівнянь рівноваги вузлів.

В проаналізованих роботах не було наведено єдиного алгоритму для моделювання дискретних каркасів поверхонь із заданими властивостями на довільно заданих опорних контурах. Крім того, в більшості робіт де використовується СГМ, зовнішні зусилля на вузли сітки, як правило, пов'язувались із власною вагою оболонки, що слугувало моделлю реального фізичного процесу. В той же час, множина зусиль зовнішнього навантаження може бути просто формоутворюючим параметром дискретної сітки і зовсім не обов'язково відображати певне фізичне явище.

**Формулювання цілей статті.** Мета роботи – сформувати дискретний каркас поверхні з використанням зовнішнього навантаження в якості формоутворюючого чинника та представити єдиний алгоритм моделювання криволінійних поверхонь із збереженням заданих естетичних властивостей.

**Основна частина.** Сучасне прагнення дизайнерів отримувати найрізноманітніші за формою поверхні вимагає від апарату дискретної геометрії використання простих методів і сучасних алгоритмів для розв'язання практичних задач із збереженням вихідних умов і досягненням потрібної точності.

Одним із методів дискретного геометричного моделювання виступає статико-геометричний метод, в основі якого знаходиться статична рівновага сітки, на вузли якої діють певні зовнішні зусилля. На рис. 1 показано п'ять суміжних вузлів сітки і рівноважний стан вузла  $M$  під дією п'яти зусиль, чотири з яких ( $\bar{R}_A; \bar{R}_B; \bar{R}_C; \bar{R}_D$ ) є зусиллями натягіння (або стиску) відповідних в'язей:  $AM, BM, CM$  і  $DM$ , а п'яте ( $\bar{P}_M$ ) їх врівноважує. Тоді,

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{R}_C + \bar{R}_D + \bar{P}_M = 0 \quad (1)$$

або у координатній формі сума проєкцій векторів зовнішніх зусиль на кожен з координатних осей дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{Ax} + \bar{R}_{Bx} + \bar{R}_{Cx} + \bar{R}_{Dx} + \bar{P}_{Mx} &= 0; \\ \bar{R}_{Ay} + \bar{R}_{By} + \bar{R}_{Cy} + \bar{R}_{Dy} + \bar{P}_{My} &= 0; \\ \bar{R}_{Az} + \bar{R}_{Bz} + \bar{R}_{Cz} + \bar{R}_{Dz} + \bar{P}_{Mz} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

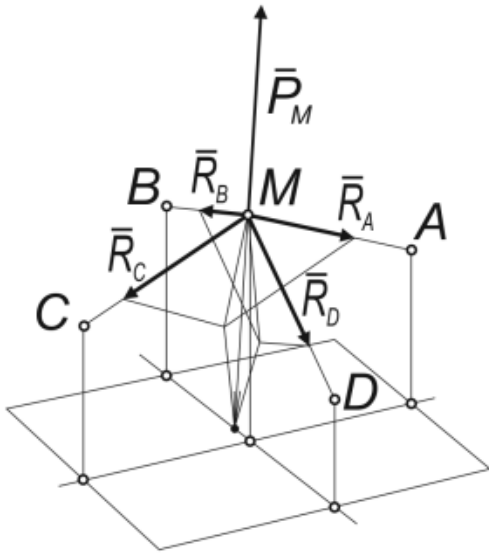


Рис. 1. Схема статичної рівноваги вузла дискретної сітки

Існує чотирипараметрична множина комбінацій зазначених зусиль у кожному вузлі, оскільки довжина кожного з векторів  $(\bar{R}_A; \bar{R}_B; \bar{R}_C; \bar{R}_D)$  може приймати довільне значення, а зусилля  $(\bar{P}_M)$  їх врівноважує.

Дискретні каркаси поверхонь побудованих за СГМ можна використати у тих випадках, коли неможливо отримати аналітичного рівняння поверхні за наперед заданими умовами, і коли в якості вихідних умов задано довільний опорний контур. Якщо план опорного контуру відрізняється від прямокутного для визначення вузлів сітки в плані потрібно скласти систему рівнянь рівноваги проєкцій зусиль на осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ :

$$\begin{aligned} X_{i-1,j} + X_{i,j-1} + X_{i+1,j} + X_{i,j+1} - 4X_{i,j} + k\bar{P}_{i,j,x} &= 0; \\ Y_{i-1,j} + Y_{i,j-1} + Y_{i+1,j} + Y_{i,j+1} - 4Y_{i,j} + k\bar{P}_{i,j,y} &= 0; \\ Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} + Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} - 4Z_{i,j} + k\bar{P}_{i,j,z} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

де  $k\bar{P}_{i,j,x}$ ,  $k\bar{P}_{i,j,y}$ ,  $k\bar{P}_{i,j,z}$  – координатні складові зовнішнього зусилля  $\bar{P}_{i,j}$ , у довільному вузлі сітки,  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

В той же час, якщо сітку вважати за абсолютно жорстку систему, то величина  $k\bar{P}_{i,j}$  не буде впливати на форму поверхні. Лише зусилля у в'язях будуть зазнавати зміни пропорційно зміні величини  $k\bar{P}_{i,j}$ . Саме тому, зовнішні зусилля у вузлах сітки мають умовний характер і їх можна використовувати як вільні параметри, не пов'язуючи із власною вагою оболонки.

Такий підхід дозволить розширити можливості використання СГМ для формоутворення різноманітних криволінійних поверхонь за рахунок того, що величини зовнішнього навантаження будуть розглядатися як формоутворюючі чинники. Це суттєво полегшить розв'язання деяких задач технічного дизайну, наприклад, дозволить надавати виробу з довільно заданими крайовими умовами певного образу у вигляді єдиної поверхні. Розглянемо це детальніше.

Бажаний прообраз задається у вигляді простої поверхні, на яку нанесено дискретну сітку. Тоді, за виразом (3) визначаються зовнішні зусилля, які врівноважують зусилля у в'язях нанесеної сітки. Нова поверхня (образ) формується на новому опорному контурі за визначеними зусиллями.

На рис. 2 наведено приклад формування поверхні вази за зовнішніми зусиллями, які перенесено з сітки на півсфері (рис. 2, а).

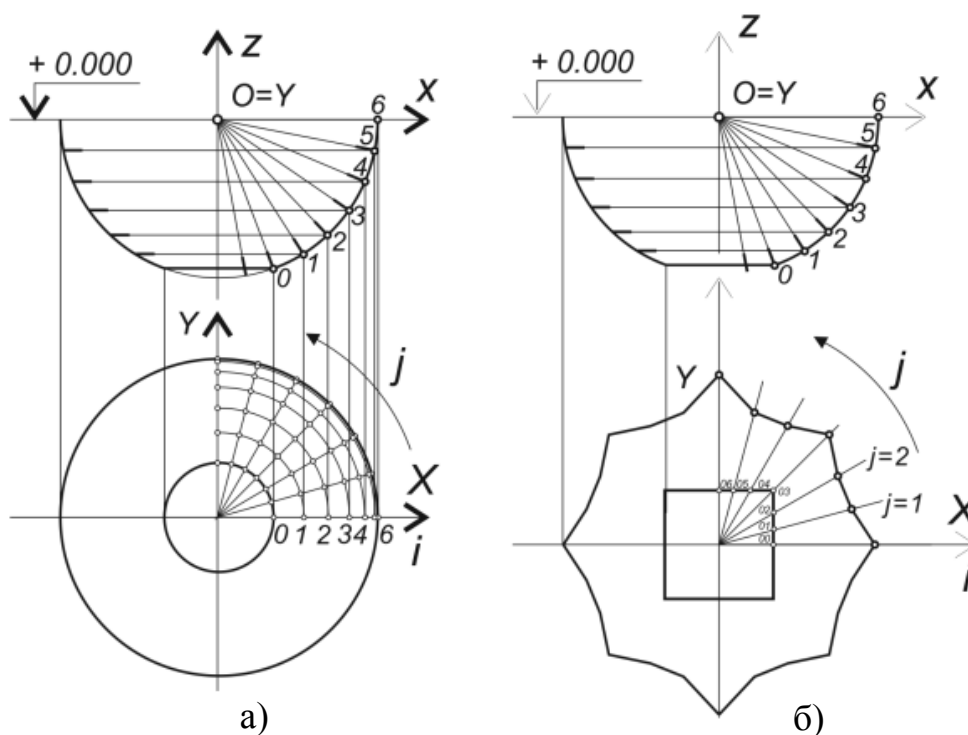


Рис. 2. Параметри вихідних умови для моделювання дискретного каркасу поверхні вази

- а) сітка на поверхні півсфери;  
 б) крайові умови на поверхні вази: форма верхньої та нижньої компонент

В якості вихідних умов маємо: зрізану півсферу (поверхню-прообраз), радіусом  $R=150$ . На цю поверхню нанесено радіально-кільцеву сітку, що знаходиться у рівновазі під дією зусиль,

прикладених до її вузлів. Збережено рівномірний крок розбиття вздовж головного меридіану на півсфері і визначено висотні рівні паралелей. Маємо: 6 паралелей і 24 меридіана. Топологічна схема сітки представлена на рис. 2, а.

За опорний контур поверхні образу (поверхні вази) (рис. 2, б) прийнято дві компоненти, які знаходяться на висоті нижньої (зрізаної) і верхньої основ півсфери. Нижня основа вази, що моделюється, представлена у вигляді квадрата. Верхня основа вази – у вигляді рівноланкової симетричної ламаної. Ці крайові умови задані у вигляді дискретних рядів вузлів, число яких відповідає крайовим умовам сітки на півсфері (рис.2, а).

Абсциси вузлів сітки на півсфері занесено в таблицю 1.

Таблиця 1

Значення абсцис вузлів сітки півсфери ( $X_{i,j}$ )

$j=6$	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	14,86	21,57	27,45	32,28	35,87	38,08	38,82
$j=4$	28,70	41,67	53,04	62,36	69,29	73,56	75,00
$j=3$	40,59	58,93	75,00	88,19	97,99	104,03	106,07
$j=2$	49,71	72,17	91,86	108,01	120,01	127,404	129,90
$j=1$	55,44	80,50	102,46	120,47	133,86	142,101	144,89
$j=0$	57,407	83,34	106,07	124,72	138,58	147,118	150,00
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$

Ординати вузлів сітки можна не визначати, оскільки вони симетричні абсцисам.

В табл. 2 наведено аплікати вузлів одного меридіана, оскільки у кожній паралелі аплікати вузлів однакові.

Таблиця 2

Висотні відмітки паралелей на півсфері ( $Z_{i,j}$ )

$Z_{i,0}$	-138,58	-124,72	-106,07	-83,34	-57,40	-29,26	0,000
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$

За відомими абсцисами та аплікатами вузлів сітки на півсфері, за формулам (3), визначено проекції довжин векторів зовнішніх зусиль  $k\bar{P}_{i,j,x}$  та  $k\bar{P}_{i,j,z}$ , відповідно, на осі  $Ox$  і  $Oz$ . Результати наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Значення проекцій векторів зовнішніх зусиль на осі  $Ox$  і  $Oz$ 

$j=5$	$P_x=2,3$ $P_z=-4,79$	$P_x=2,91$ $P_z=-4,08$	$P_x=3,44$ $P_z=-3,21$	$P_x=3,82$ $P_z=-2,20$	$P_x=4,06$ $P_z=-1,12$
$j=4$	$P_x=4,45$ $P_z=-4,79$	$P_x=5,68$ $P_z=-4,08$	$P_x=6,65$ $P_z=-3,21$	$P_x=7,38$ $P_z=-2,20$	$P_x=7,84$ $P_z=-1,12$
$j=3$	$P_x=6,29$ $P_z=-4,79$	$P_x=7,98$ $P_z=-4,08$	$P_x=9,40$ $P_z=-3,21$	$P_x=10,44$ $P_z=-2,20$	$P_x=11,096$ $P_z=-1,12$
$j=2$	$P_x=7,68$ $P_z=-4,79$	$P_x=9,79$ $P_z=-4,08$	$P_x=11,51$ $P_z=-3,21$	$P_x=12,776$ $P_z=-2,20$	$P_x=13,575$ $P_z=-1,12$
$j=1$	$P_x=8,59$ $P_z=-4,79$	$P_x=10,91$ $P_z=-4,08$	$P_x=12,84$ $P_z=-3,21$	$P_x=14,279$ $P_z=-2,20$	$P_x=15,132$ $P_z=-1,12$
$j=0$	$P_x=8,89$ $P_z=-4,79$	$P_x=11,30$ $P_z=-4,08$	$P_x=13,29$ $P_z=-3,21$	$P_x=14,76$ $P_z=-2,20$	$P_x=15,69$ $P_z=-1,12$
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$

Моделювання поверхні вази відбувається з урахуванням симетрії вихідних умов (рис.2, б). Систему рівнянь (3) рівноваги проекцій зусиль на вісі  $Ox$  і  $Oz$  складено тільки для  $1/4$  сітки. Результати розв'язання системи наведені в таблиці 4. За цими результатами на рис. 3 побудовано дві проекції та аксонометричне зображення поверхні вази.

Нижче наведений алгоритм формування дискретного каркасу поверхні із заданими властивостями з урахуванням зовнішнього навантаження в якості формоутворюючого чинника без урахування власної ваги сітки:

1. Обирається проста поверхня-прототип, на яку буде накладатись дискретна сітка. Топологія сітки далі в процесі моделювання поверхні-образу зберігається.

2. Оскільки координати вузлів сітки на поверхні, що є прототипом відомі, то проекції зовнішніх зусиль визначаються за рівняннями рівноваги (3).

3. З урахуванням заданих вихідних умов – на довільно заданому опорному контурі (контурах) поверхні, що моделюється, складається нова система рівнянь рівноваги проекцій зусиль (3) з урахуванням отриманих в п. 2 проекцій зусиль з поверхні-прототипу.

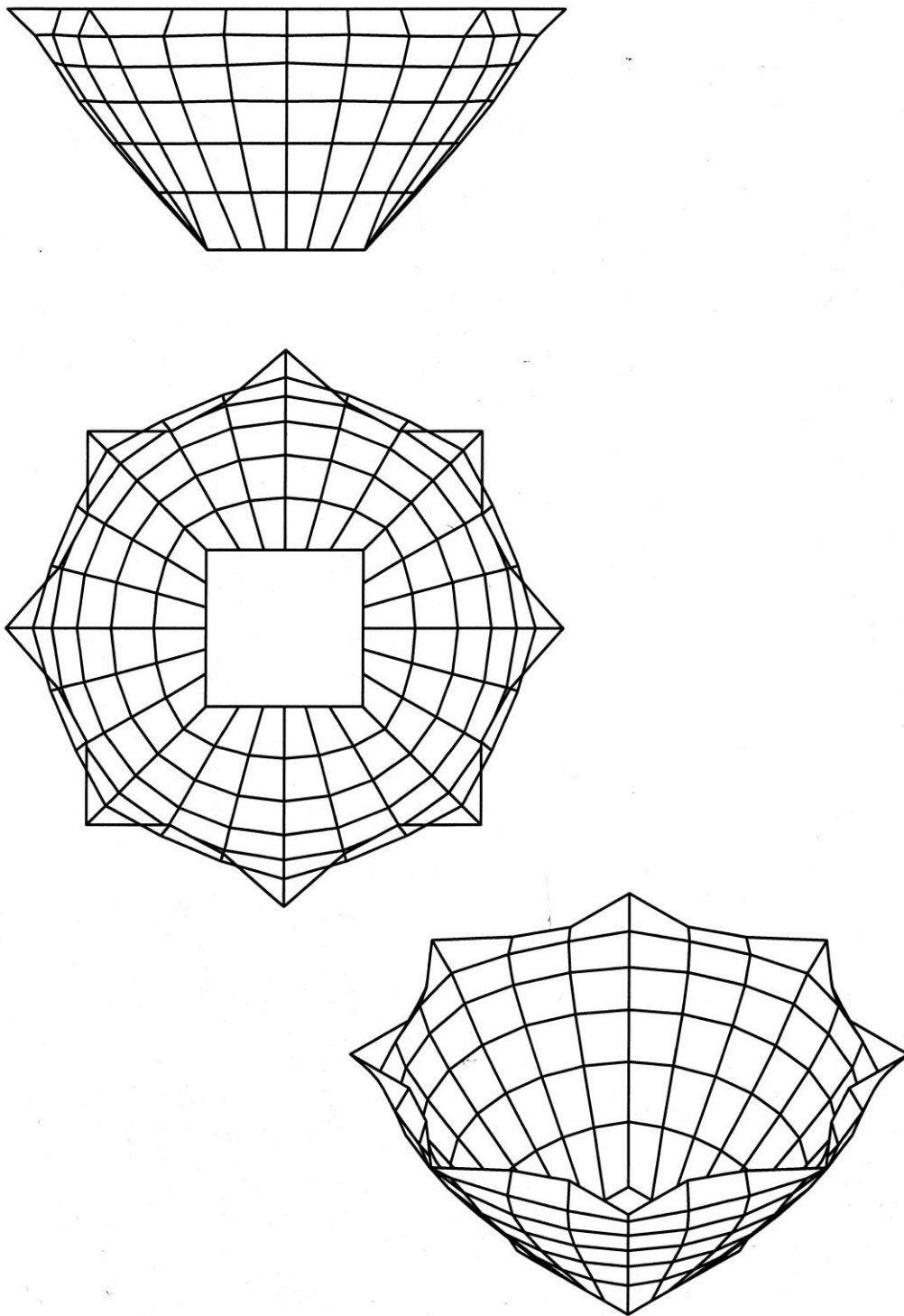


Рис. 3. Дискретний каркас поверхні вази

4. За результатами розв'язання системи п. 3 визначаються абсциси, ординати та аплікати вузлів сітки на поверхні, що моделюється і будується дискретний каркас нової поверхні, що несе на собі властивості поверхні-прообразу.

Використання алгоритму в процесі дискретного моделювання поверхні дозволить при заданих крайових умовах, заданій топології

сітки та заданій кількості вузлів отримати найкраще, у деякому розуміння, наближення до бажаної поверхні з точки зору геометрії її форми.

**Висновки.** Запропонований алгоритм побудови дискретних каркасів об'єктів дизайну на основі СГМ доцільно використовувати там, де зовнішні зусилля можна не пов'язувати із власною вагою оболонки, а враховувати їх лише як формоутворюючі чинники.

Такий підхід узагальнення СГМ дозволяє на довільно заданому опорному контурі моделювати дискретні каркаси різноманітних криволінійних об'єктів за заданим образом. Це в свою чергу дозволить керувати формою об'єкта, що моделюється.

### *Література*

1. Ковальов С.Н. Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями в дизайні та архітектурі / С.Н. Ковальов, С.І. Ботвіновська, А.В. Золотова // Управління розвитком складних систем. – 2016. - № 26.
2. Ковальов С.Н. Геометричне моделювання поверхонь СГМ за допомогою перетворення інверсії [Текст] / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська, А.В. Золотова // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Вип. 5. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – С. 47-54.
3. Формоутворююча роль зовнішнього навантаження в статико-геометричному методі [Текст] / С.М. Ковальов, О.І. Ахматшина // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Вип. 2. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – С. 43-50.

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВНЕШНИХ УСИЛИЙ В СГМ В КАЧЕСТВЕ ФОРМООБРАЗУЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ В ПРОЦЕССЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КАРКАСНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Ковалев С.Н., Ботвиновская С.И., Золотова А.В.

*В работе представлен алгоритм дискретного геометрического моделирования каркаса объекта дизайна*



*статико-геометрическим методом. В качестве формообразующих параметров использованы внешние усилия, приложенные к узлам дискретной сети и не связанные с собственным весом оболочки. Поверхность объекта дизайна моделируется на произвольно заданном опорном контуре под действие внешних усилий, которые определяются в узлах дискретной сети на простейшей поверхности-прообразе. В результате будет получена дискретная поверхность, сохраняющая свойства известного образа.*

*Ключевые слова: геометрическое моделирование, внешняя формообразующая нагрузка, дискретный каркас, статико-геометрический метод, технический дизайн.*

## **USAGE OF EXTERNAL LOADING FORCES AS SHAPING PARAMETERS IN THE PROCESS OF WIREFRAME SURFACES GEOMETRIC MODELING**

Kovalev S., Botvinovska S., Zolotova A.

*In this paper the algorithm of discrete geometric modeling based on the usage of the static-geometric method (SGM) is presented.*

*As shape-generating parameters we use the external loading forces, which are applied to the nodes of the discrete mesh and not connected with the shell's own weight.*

*A design object surface is modeled on an arbitrarily given supporting contour under the influence of external shape-generating loading forces. These external forces are defined in the nodes of the simplest prototype surface. As a result of the algorithm, it will be obtained the surface, retaining the properties of the known image.*

*Keywords: geometric modeling, the loading modeling a form, discrete framework the surface, static-geometric method, object design.*