УДК 514.74

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНА ИЗ КРИВЫХ БЕЗЬЕ 5-Й СТЕПЕНИ С НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВИЗНОЙ

Бадаев Ю.И., д.т.н.,
Ганношина И.Н.
Киевская государственная академия водного транспорта имени Петра Конашевича-Сагайдачного (Украина)

Предлагается моделирование криволинейного обвода сегментами кривых Безье 5-й степени по заданному точечному каркасу с заданными в них кривизнами и с обеспечением непрерывности кривизны вдоль обвода.

Ключевые слова: полиномиальный сегмент , сегмент кривой Безье 5-й степени, кривизна, первые и вторые производные, непрерывность кривизны.

Постановка проблемы. В проектировании обводов машин и агрегатов, которые работают в движущейся среде (самолеты, автомобили и др.) необходимо задание обвода с заданным законом изменения кривизны. Необходимо иметь аналитический аппарат решения этой задачи.

Анализ последних исследований и публикаций. В работах [2-6] предлагаются интерактивные способы проектирования обводов с заданной формой и кривизной, но не дают возможности предвидеть результаты в начале проектирования.

Формулирование целей статьи. Целью статьи является вывод аналитического аппарата моделирования криволинейного обвода по наперед заданному закону изменения кривизны, что является важным для проектирования обводов самолетов, автомобилей, суден и др.

Основная часть.Поставим следующую задачу :

задан на плоскости точечный ряд:

$$\Delta : Xi,\ Yi,\ i=0,1,\ \dots\ ,n\ ,$$

а также в каждой точке задана кривизна K_i.

Как известно из [1], кривизна для векторно-заданной кривой:

$$r=r(t)\ [\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)]. \qquad (1)$$

для плоской кривой определяется формулой:

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} x''_{tt} & y''_{tt} \\ x'_t & y'_t \end{vmatrix}^2}{(x'^2_t + y'^2_t)^3}. \qquad (2)$$

Для пространственной кривой (1) кривизна будет задана:

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} x''_{tt} & y''_{tt} \\ x'_t & y'_t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y''_{tt} & z''_{tt} \\ y'_t & z'_t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z''_{tt} & x''_{tt} \\ z'_t & x'_t \end{vmatrix}^2}{(x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t)^3}. \qquad (3)$$

Учитывая, что в формулах (2) и (3) в числителе задается квадрат векторного произведения векторов r_{tt}'' и r_t', то эти формулы можно переписать в следующем виде:

$$k^2 = \frac{(|r_{tt}''||r_t'|sin90^0)^2}{|r_t'|^6} = \frac{|r_{tt}''|^2|r_t'|^2}{|r_t'|^6} = \frac{|r_{tt}''|^2}{|r_t'|^4}. \qquad (4)$$

Отсюда:

$$k = \frac{|r_{tt}''|}{|r_t'|^2}. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что для задания в заданной точке величины кривизны k необходимо вначале задать модуль первой производной |r’| и из (5) определить и задать необходимый модуль второй производной |r’’|.

Векторно-параметрическая кривая Безье 5-й степени задается формулой

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i r_i t^i (1-t)^{(n-i)}, \qquad (6)$$

где $a_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ $n = 5.$

Перестроим (6) в виде:

$$r(t) = \sum_{i=0}^{5} A_i r_i t^i. \qquad (7)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= r_0 && (7.0)\\
A_1 &= 5(r_1 - r_0) && (7.1)\\
A_2 &= 10(r_0 - 2r_1 + r_2) && (7.2)\\
A_3 &= 10(r_3 + r_1 - r_0 - 3r_2) && (7.3)\\
A_4 &= 5(r_0 - 4r_1 + 6r_2 - 4r_3 - r_4) && (7.4)\\
A_5 &= (-r_0 + 5r_1 - 10r_2 + 10r_3 + 5r_4 + r_5) && (7.5)
\end{aligned}\right\}$$

В точке r_0 (x_0,y_0,z_0) t=0. При t=0 получим:

$$r_t'(0) = 5(r_1 - r_0); \qquad (8)$$

$$r_{tt}''(0) = 20(r_0 - 2r_1 + r_2). \qquad (9)$$

При заданных r_0’ і r_0’’ из (8) и (9) получим:

$$r_1 = r_0 + \frac{r_0'}{5} \qquad (10)$$

$$r_2 = 2r_1 - r_0 + \frac{r''_0}{20} \qquad (11)$$

Используем симметрию (6).

Если заменить параметр t на t=1-u то 1-t = u , и подставив в (6), получим формулу, симметричную к (6) в том смысле, что точки 3,4,5 и 2, 1, 0 поменяются соответственно местами. А также поскольку

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{du^2}\frac{du}{dt} + \frac{dr}{du}\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\frac{du}{dt} = -1,\ \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

то формулы (8) и (9) при t=1 перепишутся в виде:

$$r_t'(1) = -5(r_4 - r_5); \qquad (12)$$

$$r_{tt}''(1) = -20(r_5 - 2r_4 + r_3). \qquad (13)$$

Тогда на основании формул (12) и (13) в точке r_5 (t=1) будем иметь следующие зависимовти:

$$r_4 = r_5 - \frac{r_5'}{5}; \qquad (14)$$

$$r_3 = 2r_4 - r_5 - \frac{r_5''}{20}. \qquad (15)$$

Таким образом формулы (12) – (15) полностью определяют сегмент Безьє 5-й степени, который проходит через две точки r_0 и r_5 с заданными первыми и вторыми производными в них. Криволинейный обвод, образованный из таких состыкованных сегментов, будет сплайном с непрерывной кривизной вдоль обвода

Выводы. В статье получен результат аналитического проектирования обвода по заданному закону изменения кривизны.

Литература

1. Ефимов Н. В. Высшая геометрия / Н. В. Ефимов. – М.: Издательство “Наука”. – 1971. – 576с.
2. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М.: Физматгиз, 2002. – 472с.
3. Бадаєв Ю.І. Керування кривиною NURBS–кривої 3–го порядку за допомогою ваги контрольних вектор–точок / Ю. І. Бадаєв, А. О. Блиндарук // Зб. наук. Праць Київської державної академії водного трансорту. – К: КДАВТ, 2015. – №3(21). – С.103–105.

4. Бадаєв Ю.І. Можливості локальної модифікації гладкої NURBS – кривої / Ю. І. Бадаєв, А.О.Блиндарук // Труды XV международной научно–практической конференции “Современные информационные и электронные технологии”. – Одеса, 2014. – т.1. – С.26-27.
5. Бадаєв Ю.І. Компютерна реалізація проектування криволінійних обводів методом NURBS-технологій вищих порядків / Ю.І. Бадаєв, А. О. Блиндарук // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ. – Мелітополь,2014. – С.3–6.

МОДЕЛЮВАННЯ СПЛАЙНІВ НА ОСНОВІ КРИВИХ БЕЗЬЄ 5-Ї СТЕПЕНІ З БЕЗПЕРЕРВНОЮ КРИВИНОЮ

Бадаєв Ю.І., Ганношина І.М.

Пропонується моделювання криволінійного обводу сегментами кривих Безьє 5-го ступеня за заданим точкового каркасу із заданими в них кривизнами і з забезпеченням безперервності кривини уздовж обводу.

Ключові слова: поліноміальний сегмент, сегмент кривої Безьє 5-ї степеня, кривина, перші і другі похідні, безперервність кривини.

SIMULATION OF SPLINE FROM CURVES OF BEZIER OF THE 5th DEGREE WITH CONTINUOUS CURVATURE

Badayev Y., Gannoshina I.

It is proposed to simulate the curvilinear circumference of the Bezier curves of the 5th degree by segments of a given point skeleton with the curvatures given in them and ensuring the continuity of the curvature along the contour.

Keywords: polynomial segment, Bezier curve segment of the 5th degree, curvature, first and second derivatives, continuity of curvature.