

УДК 625.032

## **ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ ГРАВІТАЦІЙНОЇ МЕТАЛЬНОЇ МАШИНИ**

Сухарькова О.І.

*Український державний університет залізничного транспорту  
(м. Харків, Україна),*

Табакова І.С., к.т.н.

*Харківський національний університет радіоелектроніки (Україна)*

***В роботі складено та розв'язано рівняння Лагранжа другого роду для визначення траєкторії переміщення вантажу на праці залежно від значень параметрів конструкції машини требушет.***

***Ключові слова: машина требушет, лагранжіан, рівняння Лагранжа другого роду, траєкторія переміщення вантажу.***

***Постановка проблеми.*** В процесі гасіння масштабних за площею пожеж виникає проблема доставки до центральних зон вогнища засобів пожежогасіння. На практиці це важко здійснити через великі значення температур по периметру пожежі. У виняткових випадках застосовують доставку пожежогасних засобів з повітря літаком чи вертольотом. Але цей захід є не оперативним, небезпечним і надто коштовним. Тому увагу було звернено на можливість доставки засобів пожежогасіння за допомогою техніки метання (катапультування). Серед металевих машин найбільш цікавими для технології пожежогасіння є гравітаційні металеві машини типу требушет [1].

***Аналіз останніх досліджень і публікацій.*** Досвід реконструкцій історичних раритетів дозволив виділити різновид машини требушет, яка дозволяє метати кам'яні ядра вагою 100 кг на 200-220 метрів (з довжиною важеля 10-12 м і противагою 10 тон) [1]. При цьому було спростовано думку про неточність великих требушет, адже відхилення від ідеальної лінії не перевищувало 2-3 метри при «стрілянні» на максимальну дальність. Експериментально доведено можливість стабільного влучення в ділянку 5×5 метрів з дистанції 160-180 метрів.

Наведене дає підстави дослідити нову експериментальну технологію пожежогасіння, що базується на застосуванні гравітаційної металеві машини типу требушет, яка не потребує поточного обслуговування і розгортання в разі її доставки на пожежу. Для забезпечення ефективної динаміки требушет необхідно розрахувати значення параметрів її елементів. Це доцільно здійснити

в рамках механіки Лагранжа [2, 3], де враховуються кінетична і потенціальна енергії системи. В результаті розв'язання складеного рівняння Лагранжа другого роду одержують шукану траєкторію переміщення вантажу на праці, що дозволить спрогнозувати відстань падіння вантажу в зону пожежі. Для аналізу динаміки треба мати доцільно мати фазові траєкторії узагальнених координат, що не достатньо повно досліджено у відомих роботах [2 - 7].

**Формулювання цілей статті.** Скласти та розв'язати рівняння Лагранжа другого роду для визначення траєкторії переміщення вантажу на праці залежно від параметрів конструкції требушет.

**Основна частина.** На рис. 1 наведено схему машини требушет, яка складається з важеля довжиною  $l_1 + l_2$ , до якого шарнірно прикріплено два важеля з довжинами  $l_3$  (позначає праці) і  $l_4$  (кріплення противаги). До важелів у вузлових точках закріплені вантажі з масами  $m_1$  (противага) і  $m_2$  (речовина для метання). Маса  $m_1$  обирають на декілька порядків більшою стосовно маси  $m_2$ . При відпусканні цієї маятникової системи перший вантаж під дією гравітації падає донизу, в результаті чого другому вантажу надається прискорення, яке і спричиняє ефект метання.

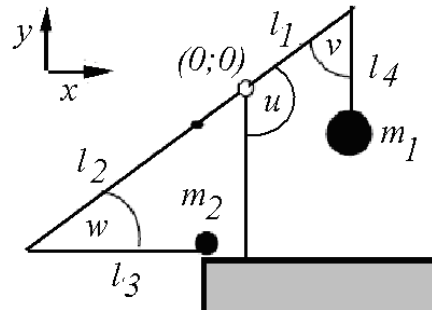


Рис. 1. Схема требушет

При складанні математичної моделі машини требушет було враховано таку ідеалізацію: за замовчуванням елементи коливальної системи невагомі, опори у вузлах під час коливань відсутні, елементи системи не деформуються, маси зосереджені в центрах мас тіл, параметри і початкові значення кутів задаються в умовних одиницях.

В якості узагальнених координат оберемо кути  $u(t)$ ,  $v(t)$  і  $w(t)$ . Для опису динаміки коливальної системи требушет використаємо вирази для кінетичної  $T$  і потенціальної  $U$  енергій [5]:

$$\begin{aligned}
 T := & -m_2 l_3 l_2 u'^2 \cos(w) + m_1 l_4^2 u' v' - m_2 l_3^2 u' w' + \frac{1}{2} u'^2 m_1 l_1^2 + \frac{1}{2} u'^2 m_2 l_2^2 \\
 & - m_1 l_4 l_1 u' v' \cos(v) - m_1 l_4 l_1 u'^2 \cos(v) + m_2 l_3 l_2 u' w' \cos(w) + \frac{1}{2} m_2 l_3^2 u'^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_2 l_3^2 w'^2 + \frac{1}{2} m_1 l_4^2 u'^2 + \frac{1}{2} m_1 l_4^2 v'^2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U := & -m_1 g l_1 \cos(u) + m_2 g l_2 \cos(u) + (-g \cos(u) \cos(w) - g \sin(u) \sin(w)) m_2 l_3 \\
 & + (\cos(u) \cos(v) - \sin(u) \sin(v)) g m_1 l_4 .
 \end{aligned}$$

Тут  $u(t)$  – функція в часі зміни кута відхилення від вертикалі важеля довжиною  $l_1 + l_2$ ,  $v(t)$  – функція зміни кута між важелями

довжинами  $l_4$  і  $l_1 + l_2$ ,  $w(t)$  – функція зміни кута між важелями довжинами  $l_3$  і  $l_1 + l_2$ ,  $g = 9,81$ .

З використанням лагранжіану  $L = T - U$  одержуємо систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned}
 & -m_1 g l_1 \sin(u) + m_2 g l_2 \sin(u) - m_2 g l_3 \sin(u) \cos(w) + m_2 g l_3 \cos(u) \sin(w) \\
 & + m_1 g l_4 \sin(u) \cos(v) + m_1 g l_4 \cos(u) \sin(v) - u'' m_1 l_1^2 + 2 m_1 l_4 l_1 u'' \cos(v) \\
 & - 2 m_1 l_4 l_1 u' \sin(v) v' + m_1 l_4 l_1 v'' \cos(v) - m_1 l_4 l_1 v'^2 \sin(v) - u'' m_2 l_2^2 \\
 & + 2 m_2 l_3 l_2 u'' \cos(w) - 2 m_2 l_3 l_2 u' \sin(w) w' - m_2 l_3 l_2 w'' \cos(w) \\
 & + m_2 l_3 l_2 w'^2 \sin(w) - m_2 l_3^2 u'' + m_2 l_3^2 w'' - m_1 l_4^2 u'' - m_1 l_4^2 v'' = 0 \\
 & m_2 l_3 l_2 u'^2 \sin(w) - m_2 g l_3 \cos(u) \sin(w) + m_2 g l_3 \sin(u) \cos(w) - m_2 l_3 l_2 u'' \cos(w) \\
 & - m_2 l_3^2 w'' + m_2 l_3^2 u'' = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Систему рівнянь (2) розв'язано чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти у середовищі Maple з такими початковими умовами:  $u_0, v_0, w_0$  – початкові значення кутів відхилення важелів;  $u'_0, v'_0, w'_0$  – початкові швидкості зміни кутів відхилення. Використовуючи знайдені наближені розв'язки для функцій  $u(t)$ ,  $v(t)$  і  $w(t)$  (позначимо їх, відповідно,  $U(t)$ ,  $V(t)$  і  $W(t)$ ), в декартовій системі координат  $xOy$  траєкторії переміщення вантажу необхідно будувати за формулами:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -l_2 \sin(U(t)) + l_3 \sin(U(t) - W(t)); \\
 y(t) &= l_2 \cos(U(t)) - l_3 \cos(U(t) - W(t)).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Тобто для певних моментів часу  $t$  за допомогою формул (3) можна визначити миттєві координати корисного вантажу в вертикальній площині у системі декартових координат  $xOy$ .

Наведемо розрахунок моделі требушет з параметрами  $m_1 = 1000$ ;  $m_2 = 1$ ;  $l_1 = 10$ ;  $l_2 = 100$ ;  $l_3 = 100$ ;  $l_4 = 21$  і з початковими умовами  $u_0 = 3\pi/4$ ;  $u'_0 = 0$ ;  $v_0 = \pi/4$ ;  $v'_0 = 0$ ;  $w_0 = \pi/4$ ;  $w'_0 = 0$  (для порівняння з результатами роботи [5]). На рис. 2 наведено фазові траєкторії для кутів  $u(t)$ ,  $v(t)$  і  $w(t)$ . Аналіз фазових траєкторій дозволяє з'ясувати, що максимальну швидкість зміна кута  $w(t)$  досягне при значенні  $w = 3,2$ . Тоді ж максимальної швидкості досягне і зміна кута  $v(t)$ . В цей момент корисний вантаж для метання також набуде максимальної швидкості.

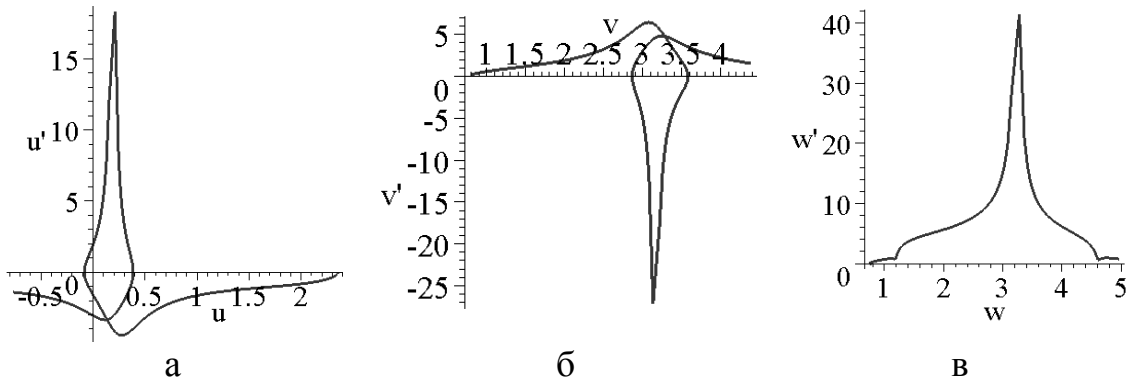


Рис. 2. Фазова траєкторія для параметра: а)  $u(t)$ ; б)  $v(t)$ ; в)  $w(t)$ .

Для визначення рекомендованого моменту  $t_0$  відриву вантажу від праці необхідно побудувати графік залежності в часі швидкості зміни кута  $w$ . На рис. 3 зображено відповідний графік, з якого видно, що максимальна швидкість зміни кута настане при  $t_0 = 2,26$ .

За допомогою складеної програми було створено анімаційний фільм дії требушет. На рис. 4 наведено окремі фази переміщення його елементів та траєкторію руху вантажу.

Одержані дані дозволяють визначити дальність метання вантажу [6,7].

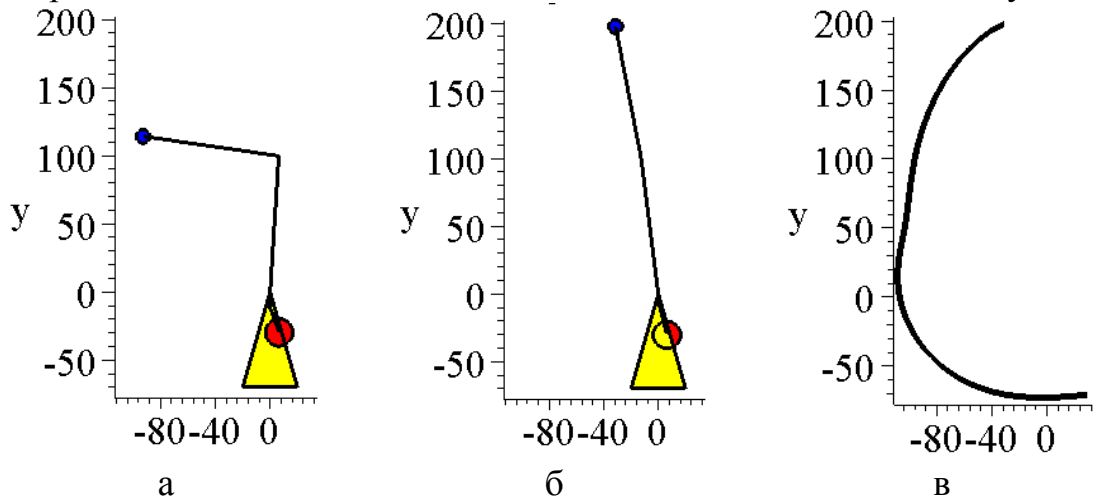


Рис. 3. Залежність зміни швидкості зміни кута  $w$  від часу

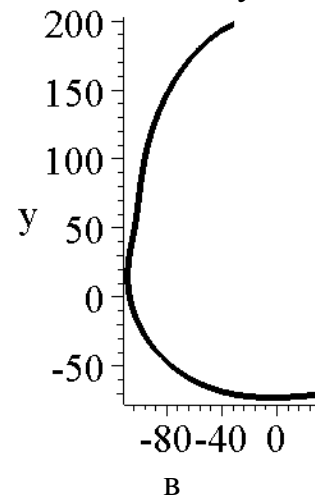
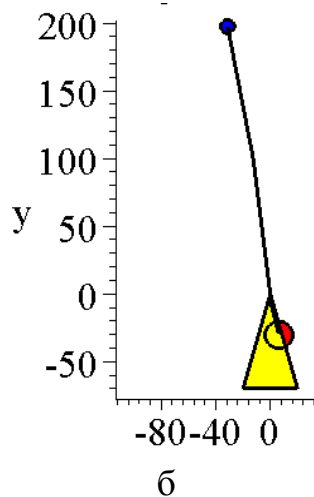
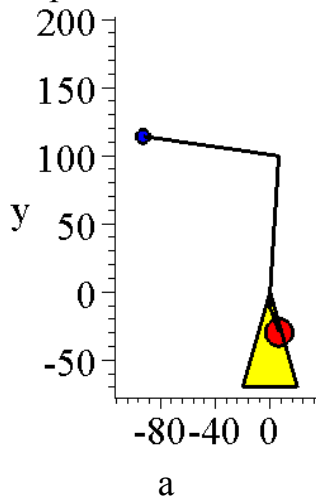


Рис. 4. Одержані зображення: а) поточної фази метання; б) фази в момент відриву вантажу; в) траєкторії руху вантажу

**Висновки.** Наведений спосіб розрахунку траєкторії переміщення корисного вантажу на праці металної машини типу требушет дозволяє визначити кут та швидкість вильоту вантажу, що, в свою чергу, дозволяє визначити траєкторію польоту корисного вантажу після його катапультування.

### *Література*

1. Трубников Б.Г. Метательное оружие / Б.Г.Трубников. – СПб.: Амфора. ТИД Амфора; НРК, 2004. – 150 с.
2. Siano D.V. Trebuchet Mechanics [Электронный ресурс] / D.V. Siano. – 2001. Режим доступа: <http://www.algobeautyreb.com/trebmath35.pdf>.
3. Denny M. Siege engine dynamics [Электронный ресурс] / M/ Denny/ Denny. – 2005. Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/1728866/>.
4. Mosher A. Mathematical Model for a Trebuchet [Электронный ресурс] / A. Mosher. – 2009. Режим доступа: [http://classes.engineering.wustl.edu/2009/fall/ese251/presentations/\(AAM\\_13\)Trebuchet.pdf](http://classes.engineering.wustl.edu/2009/fall/ese251/presentations/(AAM_13)Trebuchet.pdf).
5. Rutan S. Modern Siege Weapons: Mechanics of the Trebuchet [Электронный ресурс] / S. Rutan, B. Wiczorec. – 2005. Режим доступа: <https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEProj/sp05/bshawn/presentation.pdf>.
6. Taggart M. Final Year Project The Mechanics of the Trebuchet [Электронный ресурс] / M. Taggart. – 2006. Режим доступа: <http://dl.icdst.org/pdfs/files/3242543a5f49515bde5b9ce94ef2a96a.pdf>.
7. Jahed H. Trebuchet Design [Электронный ресурс] / H. Jahed. – 2006. Режим доступа: [https://www.google.ru/search?hl=ru&q=Trebuchet+Design+Hamid+Jahed&gws\\_rd=ssl](https://www.google.ru/search?hl=ru&q=Trebuchet+Design+Hamid+Jahed&gws_rd=ssl).

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗА ГРАВИТАЦИОННОЙ МЕТАТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ**

Сухарькова Е.И., Табакова И.С.

*В работе составлены и решены уравнения Лагранжа второго рода для определения траектории перемещения груза на праще в зависимости от значений параметров конструкции машины требуется.*

*Ключевые слова: машина требуется, лагранжиан, уравнение Лагранжа второго рода, траектория перемещения груза.*

## **DETERMINATION OF THE TRAJECTORY OF CARGO TRANSPORTATION GRAVITATIONAL METHETAL MACHINE**

Sukharkova E., Tabakova I.

*In this paper, Lagrange equations of the second kind are compiled and solved to determine the trajectory of the movement of the load on the sling, depending on the values of the machine trebuchet design parameters.*

*Key words: machine trebuchet, the Lagrangian, the Lagrange equation of the second kind, trajectory of the movement of the load.*