

УДК 515.2

## ФАЗОВІ ПОРТРЕТИ ВІДБИВАЛЬНИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ, ОБМЕЖЕНИХ ФРАГМЕНТАМИ ЕЛІПСА

Шевченко С.М.

*Національний університет цивільного захисту України  
(м. Харків, Україна)*

*Наведено математичне забезпечення комп'ютерної програми побудови фазових портретів відбивальних систем для фігур, контури яких мають вигляд фрагментів прямих і еліпса.*

*Ключові слова: фазовий портрет, фазовий простір, відбивальна система, математичний більярд, інваріантні криві.*

**Постановка проблеми.** Ефективні засоби дослідження деяких задач класичної механіки спираються на застосування відбивальних систем типу математичних більярдів [1]. Математичний плоский більярд схожий на звичайний більярд, але відрізняється довільною конфігурацією стола й відсутністю луз. Він є сильно спрощеною моделлю для задач класичної механіки, хоча існує природна аналогія між деякими фізичними задачами й системами більярдного типу.

Дослідження відбивальних систем базується на використанні фазового простору і фазових портретів [2]. При цьому вважається, що вихідний після відбиття вектор  $V$  характеризується циклічною координатою  $\varphi \in S^1$ , яка задає положення точки на кривій  $\Gamma$ , і кутом  $\alpha \in [0, 2\pi)$  між дотичним вектором і вектором  $V$  (рис. 1).

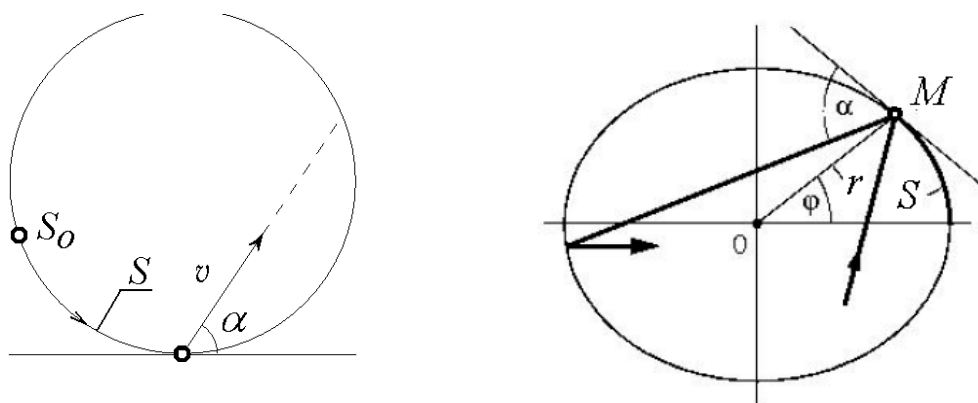


Рис. 1. Елементи відбивальної системи

Фазовий простір відбивальної системи являє собою циліндричну поверхню, тому що після відбиття вектора одержуємо нову точку  $S_1$  і новий вихідний вектор, якому відповідає кут  $\alpha_1$ . Відображення  $T(S_0, \alpha_0) = (S_1, \alpha_1)$  являє собою відображенням відбиття [1, 2].

За умови неперервності це відображення можна продовжити на замкнутий циліндр. Точки, для яких  $\alpha = 0$ , є нерухомими – тому що крива  $\Gamma$  не містить відрізків. Наявність прямолінійних відрізків у складі границі призводить до розривності відображення відбиття, що становить складність при програмній реалізації ідеї відображення.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Відображення бильярдної системи має дві важливі якісні властивості, які положено в основу алгоритму.

- Збереження площі. Зберігається елемент  $dA = \sin \alpha d\alpha dS = d\beta dS$ , де  $\beta = \cos \alpha$ . Отже, щоб увести координати, у яких зберігається площа, потрібно замість  $\alpha$  взяти  $\cos \alpha = \beta$ .

- Закручування. Фіксуємо координату  $S_0$  і будемо змінювати координату  $\alpha$ . Координата  $S$  образа буде монотонно змінюватися, поки вона не обійде все коло і повернеться назад. Тобто образ «вертикалі» як твірної циліндра має закручуватися.

Картині в конфігураційному просторі відповідає у фазовому просторі фазовий портрет [2]. На рис. 2 у якості приклада наведено фазовий портрет для еліпса.

Зазначимо, що у випадку еліпса це зображення схоже на фазову траєкторію для математичного маятника, коли фазовий циліндр розгорнуто. А саме, тут є дві орбіти періоду 2, що відповідають великому й малому діаметру еліпса. «Горизонтальна вісімка» (сепаратриса) відповідає орбітам, що проходять через фокуси еліпса, тобто якщо орбіта проходить через фокус, то вона й далі буде по черзі проходити через фокуси. Те, що розташовано поза цією «вісімкою», складається з орбіт, які дотикаються еліпсів. А те, що усередині, - з орбіт, що дотикаються гіпербол.

**Формулювання цілей статті.** Навести алгоритмічне забезпечення побудови фазових портретів відбивальних систем для фігур, обмежених фрагментами відрізків прямих і дуг еліпса.

**Основна частина.** Комп'ютерний експеримент дозволяє дослідити досить складні явища. Для вивчення відбивальних систем обирається точка  $z_0$  фазового циліндра  $M$  і будується траєкторія відображення відбиття, що виходить з неї.

Розроблена програма видає наступну (після  $z_0$ ) точку відбиття  $z_1 \in M$ , потім точку другого відбиття  $z_2 \in M$  і так далі. Виникає питання: як будуть розташовані в  $M$  точки  $z_0, z_1, z_2, \dots$ ? Для

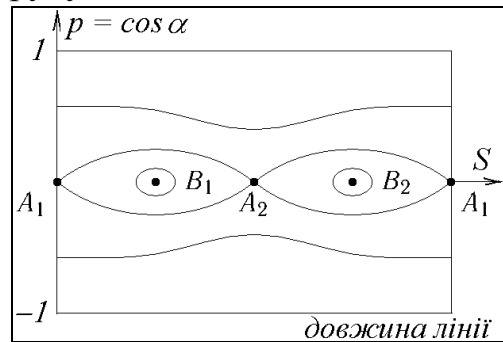


Рис. 2. Траєкторії у фазовому просторі вибивальної системи для еліпса

відображення відбиття в колі відповідь проста: всі вони лежать на одній і тій же лінії  $\varphi = \text{const}$  у циліндрі  $M$ . Аналогічна картина в еліпсі: всі точки  $z_0, z_1, z_2, \dots$  лежать на одній лінії в циліндрі  $M$ , що описує всі траєкторії, які дотикаються даної катакаустики [3, 4].

Важливо, що весь циліндр  $M$  розшаровується на окремі лінії як на несполучені доріжки, у яких рух відбувається незалежно (потрапивши на одну з них, траєкторія ніколи з її не зійде). Ці лінії називаються інваріантними кривими, тому що вони переходять самі в себе (зберігаються) під дією відображення  $T$ . Наявність фазових портретів спрощує дослідження системи. Дійсно, знаючи інваріантну криву, на якій виявилася вихідна точка  $z_0$ , є можливість прогнозувати її «майбутнє» і відновити її «минуле». Тому доцільно не вивчати рух точки у фазовому просторі, а вивчити її рух на інваріантній кривій.

Для побудови картини відбиттів і відповідних фазових портретів було складено програму. Вважається, що початковий напрям руху ланки траєкторії утворює з віссю  $Ox$  кут  $45^\circ$ , при цьому було використано 250 відбиттів. На рис. 3 наведено траєкторії променів в еліпсі та відповідні фазові портрети відбиття.

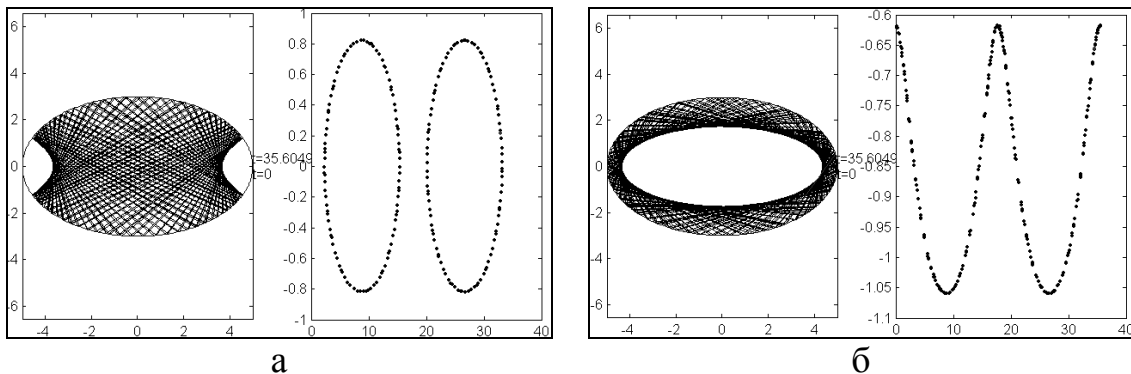


Рис. 3. Траєкторії та фазові портрети з початком:  
а) між фокусами еліпса; б) за межами відрізка між фокусами

На рис. 4 наведено траєкторії та фазові портрети відбивальних систем в областях, комбінованих з еліпсом.

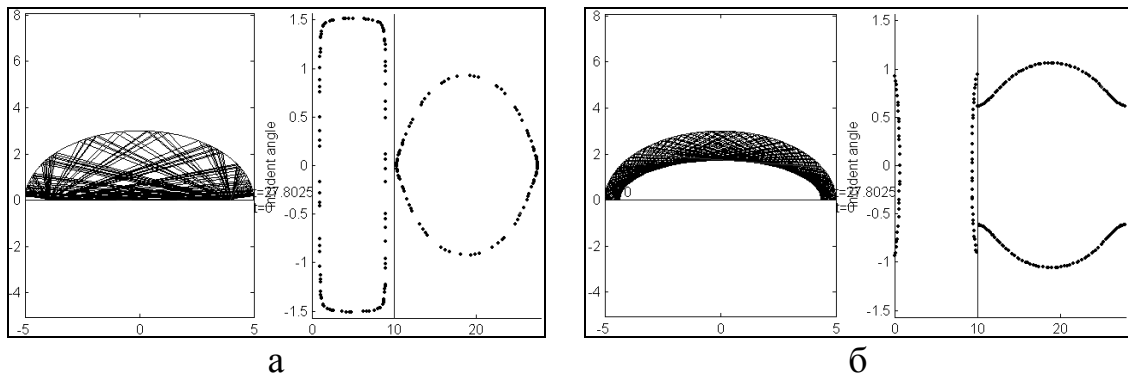


Рис. 4. Траєкторії та фазові портрети з початком у точці:  
а) (3,99; 0); б) (4,5; 0)

На рис. 5 наведено фазові портрети відбивальних систем для області, яка має назву «гриба Бунімовича» [5].

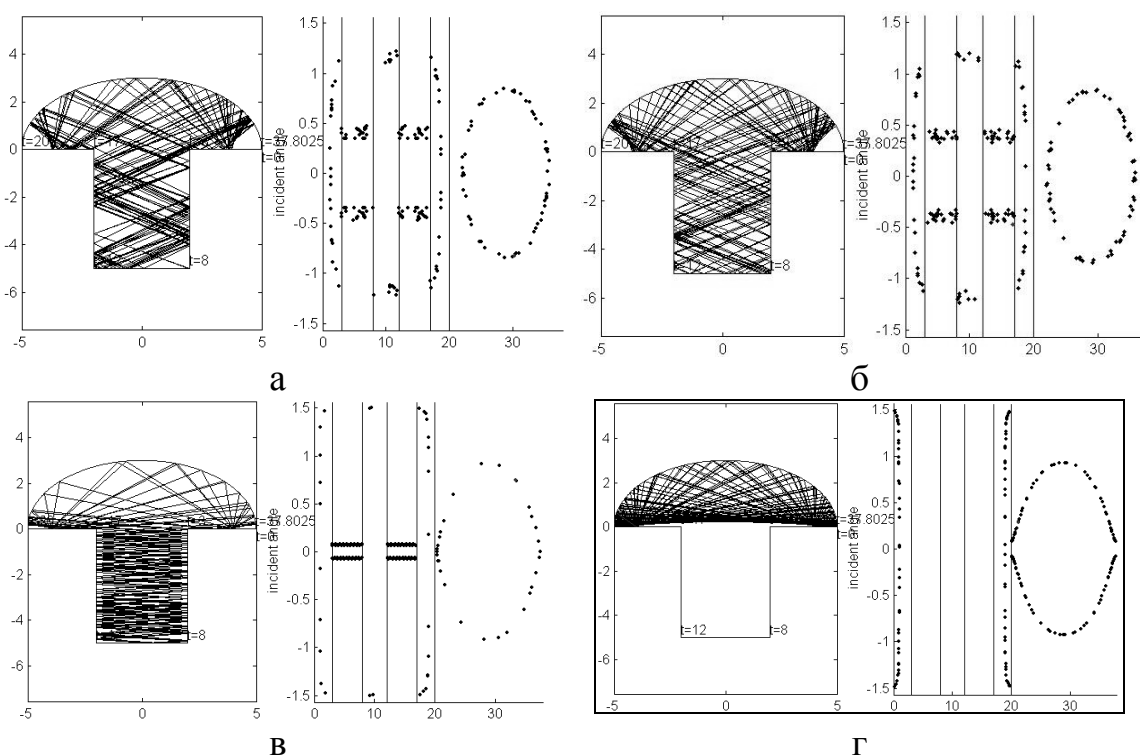


Рис. 5. Траєкторії та фазові портрети з початком у точці:  
а) (3,5; 0); б) (3,7; 0); в) (3,99; 0); г) (4,01; 0)

Відомі різновиди математичних більярдів. Наприклад, більярд, що розсіює, моделює так званий газ Лоренца [6]. Крім того, розглядаються відбивальні системи більярдного типу, обмежені границю, яка збурюється. При цьому наслідок коливання границь виявляється у феномені прискорення Фермі – тобто розподілу більярдних часток за швидкостями. А саме, коли початкова швидкість часток перевищує деяку критичну величину, характерну для даної геометрії більярда, то частка прискорюється. Якщо ж початкова швидкість нижче критичної, то більярдні частки уповільнюються.

Відбивальні системи більярдного типу служать моделями в акустиці, оптиці й в інших галузях. Крім того, питання, що виникають при дослідженні більярдних моделей, тісно пов'язані з ергодичною гіпотезою Больцмана [1, 6].

**Висновки.** Побудовані фазові портрети відображення відбиття дозволяють здійснити аналіз інваріантних багатократних відбиттів більярдів з прямолінійними і еліптичними ділянками. Наявність фазових портретів спрощує дослідження системи, адже знаючи інваріантну криву з початковою точкою  $z_0$ , є можливість прогнозувати її «майбутнє» і «минуле» положення на контурі більярда.

### *Література*

1. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем / Г.М. Заславский. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
2. Гальперин Г.А. Математические бильярды, бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики. (Библ. “Квант”) / Г.А.Гальперин, А.Н. Земляков. – М.: Наука, 1990.–Вып.77. –288 с.
3. Білецький С.В. Геометричне моделювання багатократних відбиттів світлових і теплових променів в еліптичних областях: автореф. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.01.01/ Київський національний університет будівництва і архітектури. – Київ, 2006. – 20 с.
4. Ткаченко В.П.. Фазові портрети математичних бильярдів, комбінованих з еліпсом / В.П. Ткаченко, І.Л. Куценко, С.В. Білецький // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Вип. 20. – Харків: ХДУХТ. – С. 95–100.
5. Бунимович Л.А. Системы гиперболического типа с особенностями / Л.А.Бунимович // Динамические системы – 2 (Итоги науки и техники). – М.: ВИНТИБ 1985. – Т.2. – с. 173–204.
6. Лоскутов А.Ю. Основы теории сложных систем / А.Ю. Лоскутов, А.С.Михайлов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 620 с.

## **ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ФРАГМЕНТАМИ ЭЛЛИПСА**

Шевченко С.Н.

*Приведено математическое обеспечение компьютерной программы построения фазовых портретов отражательных систем для фигур, контуры которых имеют вид фрагментов прямых и эллипса.*

*Ключевые слова: фазовый портрет, фазовое пространство, отражательная система, математический бильярд, инвариантные кривые.*

## **PHASE PORTRAITS OF REFLECTIVE SYSTEMS IN THE REGIONS LIMITED BY ELLIPSE FRAGMENTS**

Shevchenko S.

*The mathematical support of the computer program for constructing phase portraits of reflecting systems for figures whose contours have the form of fragments of straight lines and an ellipse is given.*

*Keywords: phase portrait, phase space, reflecting system, mathematical billiards, invariant curves.*