

УДК 514.18

ПЛОСКІ ІЗОМЕТРИЧНІ СІТКИ ЗА ДИСКРЕТНИМ РЯДОМ ТОЧОК

Аушева Н.М., д.т.н.

*Національний технічний університет України «Київський
політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,*

Несвідоміна О.В., аспірант*

*Національний університет біоресурсів і природокористування
України (м. Київ)*

В роботі наведено окремі рівняння та зображення плоских ізометричних сіток за вихідним дискретним рядом точок та основними методами його інтерполяції та апроксимації.

Ключові слова: крива Лагранжа, крива Без'є, дробово-раціональна крива, ізотропна крива, ізометрична сітка.

Постановка проблеми. Властивістю ізометричних (або ще ізотермічних) сіток (поверхонь) є те, що їх елементарні комірки мають форму квадратів – крайні коефіцієнти 1-ої квадратичної форми однакові. Застосування ізометричних сіток має місце при моделюванні поширення тепла, нанесенні зображень на криволінійні форми з мінімальними спотвореннями тощо. В подібних задачах формування плоскої ізометричної сітки іноді корисно здійснювати через задання координат дискретного точкового ряду напрямної кривої.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В праці [2] розглянуто побудови ізометричних сіток для кривих Без'є, Лагранжа, дробово-раціональних кривих. В роботі [3] досліджено плоскі ізометричні сітки для будь-якої напрямної кривої заданої в параметричній формі.

Формулювання цілей статті. Розробити додатки до системи комп'ютерної математики Maple [1] формування та дослідження плоских ізометричних сіток за наперед заданим рядом точок.

Основна частина. Отримати аналітичний опис плоскої ізометричної сітки можна маючи параметричне рівняння кривої [3]. Так, для будь-якої параметричної плоскої кривої на дійсній площині:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[x(t), y(t)], \quad (1)$$

буде відповідати ізотропна крива (крива нульової довжини), якщо її параметричне рівняння на комплексній площині записати у вигляді:

$$\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r}_c[x(t) \pm y(t) \cdot I, y(t) \mp x(t) \cdot I], \quad (2)$$

де $I = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

* Науковий керівник – д.т.н., професор Аушева Н.М.

Із ізотропної плоскої кривої $\mathbf{r}_c(t)$ можна отримати дві ізометричні сітки, якщо у рівнянні (2) виконати заміну параметра t на комплексну змінну $u + v \cdot I$:

$$\mathbf{R}_c(u, v) = \mathbf{R}_c[x(u + vI) \pm y(u + vI)I, y(u + vI) \mp x(u + vI)I], \quad (3)$$

та виразити з останнього виразу дійсну $\mathbf{R}_{re}(u, v) = Re(\mathbf{R}_c(u, v))$ або ж уявну частини $\mathbf{R}_{im}(u, v) = Im(\mathbf{R}_c(u, v))$.

Якщо ж напрямною кривою плоскої ізометричної сітки є дискретний точковий ряд $\mathbf{r}_j = [X_j, Y_j]$, то необхідно перейти до його параметричного вигляду $\mathbf{r}[x(t), y(t)]$, використовуючи відомі методи інтерполяції та апроксимації (рис.1).

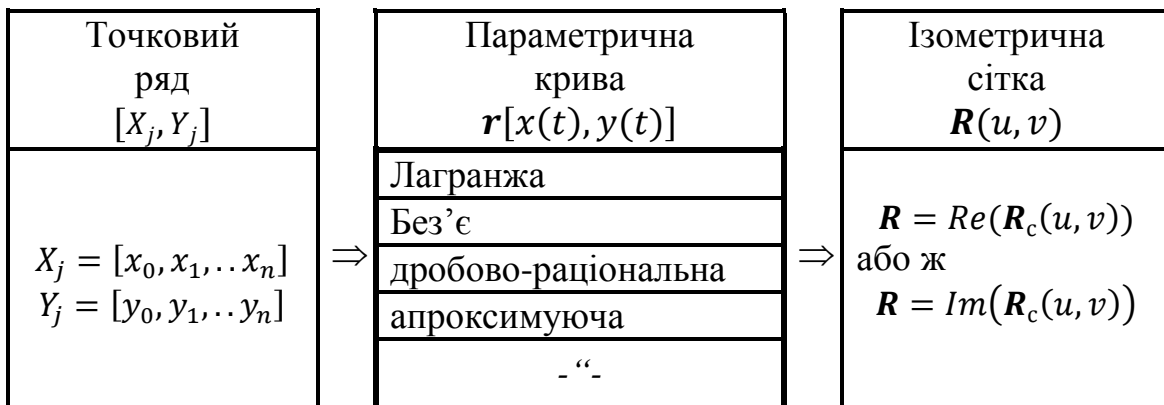


Рис.1. Схема формування ізометричних сіток

Було розроблено програмне забезпечення для середовища символної алгебри Maple [1] автоматизованого формування та дослідження ізометричних сіток для будь-якого ряду точок $\mathbf{r}_j = [X_j, Y_j]$. Для тестування додатку обсежилися п'ятьма вузлами дискретного ряду з наступними їх координатами:

$$X_j = [1, 4, 7, 10, 15], \quad (4)$$

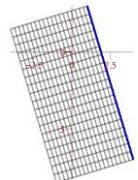
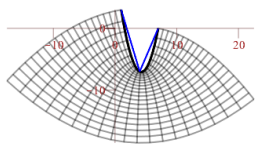
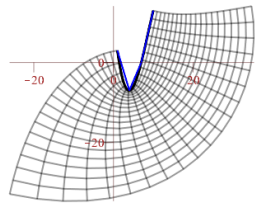
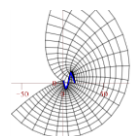
$$Y_j = [3, -7, 0, 13, 0]. \quad (5)$$

В 4-х таблицях наведено рівняння n – го порядку інтерполяційної чи апроксимуючої кривої відповідної ізометричної сітки $\mathbf{R}(u, v) = Re(\mathbf{R}_c(u, v))$, її лінійного елемента ds^2 та межі зміни параметрів u, v – координат сітки. Для порядку $n > 2$ кривої $\mathbf{r}(t)$ рівняння ізометричних сіток $\mathbf{R}(u, v)$ є досить громіздкими і тому тут вони не приводяться. Оскільки координати вузлів дискретного ряду (4)-(5) є цілими числами, то отримані коефіцієнти рівнянь $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{R}(u, v)$ та ds^2 визначаються точно і представляються у вигляді дробів.

Аналіз результатів проведених обчислювальних експериментів показує, що найбільш прогнозованими є криві Лагранжа і Без'є, а значить і плоскі ізометричні сітки на їх основі. Оскільки суттєвий вплив на дробово-раціональну криву мають вагові коефіцієнти, то вигляд ламаної (4)-(5) візуально не узгоджується з напрямною кривою $\mathbf{r}(t)$.

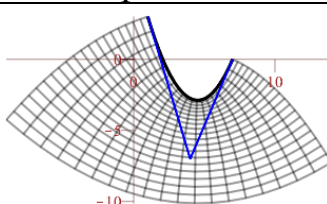
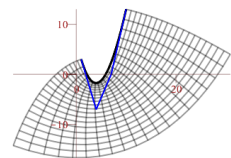
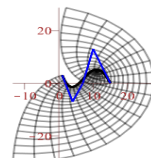
Рівняння та зображення ізометричних сіток на основі многочлена Лагранжа $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^n r_j J_j(t)$, де $J_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-t_k}{t_j-t_k}$ наведено в табл.1.

Таблиця 1

n	Рівняння	Зображення
n=1	$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 3t + 1, \\ -10t + 3 \end{bmatrix};$ $\mathbf{R}(u, v) = \begin{bmatrix} 3u - 10v + 1, \\ -10u - 3v + 3 \end{bmatrix};$ $ds = 109(du^2 + dv^2);$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	
n=2	$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 6t + 1, \\ 34t^2 - 37t + 3 \end{bmatrix};$ $\mathbf{R}(u, v) = \begin{bmatrix} 68uv + 6u - 37v + 1, \\ 34u^2 - 34v^2 - 37u - 6v + 3 \end{bmatrix};$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	
n=3	$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 9t + 1, \\ -\frac{99}{2}t^3 + 126t^2 - \frac{133}{2}t + 3 \end{bmatrix};$ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\frac{297}{2}u^2v + \frac{99}{2}v^3 + 252uv - \frac{133}{2}v + 9u + 1, \\ \frac{297}{2}uv^2 - \frac{99}{2}u^3 + 126(u^2 - v^2) - \frac{133}{2}u - 9v + 3 \end{bmatrix};$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	
n=4	$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{64}{3}t^4 - 32t^3 + \frac{44}{3}t^2 - 10t + 1, \\ -224t^4 + \frac{656}{3}t^2 + 70t^2 - \frac{203}{3}t + 3 \end{bmatrix};$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	

В табл.2 наведено рівняння та зображення плоских ізометричних сіток для кривої Без'є $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^n r_j J_{n,j}(t)$, де $J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}$.

Таблиця 2

n	Рівняння	Зображення
n=2	$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 6t + 1, \\ 17t^2 - 20t + 3 \end{bmatrix};$ $\mathbf{R}(u, v) = \begin{bmatrix} 34uv + 6u - 20v + 1, \\ 17u^2 - 17v^2 - 20u - 6v + 3 \end{bmatrix};$ $ds = 4(289(u^2 + v^2) - 340u + 102v + 109)(du^2 + dv^2);$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	
n=3	$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 9t + 1, \\ -11t^3 + 51t^2 - 30t + 3 \end{bmatrix};$ $\mathbf{R}(u, v) = \begin{bmatrix} -33u^2v + 11v^3 + 102uv + 9u - 30v + 1, \\ -11u^3 + 33uv^2 + 51u^2 - 51v^2 - 30u - 9v + 3 \end{bmatrix};$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	
n=4	$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 2t^4 + 12t + 1, \\ -21t^4 - 44t^3 + 102t^2 - 40t + 3 \end{bmatrix};$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	

Рівняння та зображення плоских ізометричних сіток для дробово-раціональної кривої $r(t) = \frac{\sum_{j=0}^n r_j w_j J_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j J_{n,j}(t)}$, де $J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}$ з ваговими коефіцієнтами $w_j = [1, 2, 2, 1, 1]$ наведено в табл.3.

Таблиця 3

n	Рівняння	Зображення
n=2	$r(t) = \left[\begin{array}{c} \frac{(1-t)^2 + 16t(1-t) + 14t^2}{(1-t)^2 + 4t(1-t) + 2t^2} \\ \frac{12t(1-t) + 12t^2}{(1-t)^2 + 4t(1-t) + 2t^2} + 3 \end{array} \right];$ $ds = \frac{288(du^2 + dv^2)(u^2 + (v-1)^2)(u^2 + (v+1)^2)}{(u^4 - 4u^3 + (2v^2 + 2)u^2 + (-4v^2 + 4)u + v^4 + 6v^2 + 1)^2};$ $u = 0..1; v = 0..0.8$	
n=3	$r(t) = \left[\begin{array}{c} \frac{(1-t)^3 + 24t(1-t)^2 + 42t^2(1-t) + 10t^3}{(1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 6t^2(1-t) + t^3} \\ \frac{18t(1-t)^2 + 36t^2(1-t) + 9t^3}{(1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 6t^2(1-t) + t^3} + 3 \end{array} \right];$ $u = 0..1; v = 0..0.5$	
n=4	$r(t) = \left[\begin{array}{c} \frac{(1-t)^4 + 32t(1-t)^3 + 84t^2(1-t)^2 + 40t^3(1-t) + 15t^4}{(1-t)^4 + 8t(1-t)^3 + 12t^2(1-t)^2 + 4t^3(1-t) + t^4} \\ \frac{24t(1-t)^3 + 72t^2(1-t)^2 + 36t^3(1-t) + 14t^4}{(1-t)^4 + 8t(1-t)^3 + 12t^2(1-t)^2 + 4t^3(1-t) + t^4} \end{array} \right];$ $u = 0..1; v = 0..0.4$	

В табл.4 наведено рівняння та зображення ізометричних сіток апроксимаційної кривої 2-4 порядків за методом найменших квадратів.

Таблиця 4

n	Рівняння	Зображення
n=2	$r(t) = \left[\begin{array}{c} t \\ \frac{6442}{109437} t^2 - \frac{139720}{109437} t + \frac{111059}{36479} \end{array} \right];$ $R(u, v) = \left[\begin{array}{c} -\frac{12884}{109437} uv + u + \frac{139720}{109437} v \\ -\frac{6442}{109437} (u^2 - v^2) + \frac{139720}{109437} u - v - \frac{111059}{36479} \end{array} \right];$ $u = 0..10; v = 0..5$	
n=3	$r(t) = \left[\begin{array}{c} t \\ \frac{49931987}{3711063} - \frac{137954065}{11133189} t + \frac{48090187}{22266378} t^2 - \frac{2068205}{22266378} t^3 \end{array} \right];$ $R(u, v) = \left[\begin{array}{c} u - \frac{137954065}{11133189} v + \frac{48090187}{11133189} uv - \frac{2068205}{7422126} u^2 v + \frac{2068205}{22266378} v^3 \\ \frac{49931987}{3711063} - \frac{137954065}{11133189} u + \frac{48090187}{22266378} (u^2 - v^2) - \frac{2068205}{22266378} u^3 + \frac{2068205}{7422126} uv^2 - v \end{array} \right];$ $u = 0..10; v = 0..5$	
n=4	$r(t) = \left[\begin{array}{c} t \\ \frac{3323}{297} - \frac{53717}{5670} t + \frac{53699}{41580} t^2 - \frac{1}{315} t^3 - \frac{367}{124740} t^4 \end{array} \right];$ $u = 0..10; v = 0..5$	

Висновки. Проведеними обчислювальними експериментами з формування та дослідження плоских ізометричних сіток за наперед заданим дискретним точковим рядом показано, що без сучасних систем символічних перетворень розв'язати подібні задачі неможливо із-за громіздкості аналітичного опису. Використання дробово-раціональних кривих із ваговими коефіцієнтами для формування плоских ізометричних сіток є недоречним, оскільки відсутній візуальний взаємозв'язок між зображеннями ламаної дискретного точкового ряду та відповідною кривою інтерполяції.

Література

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple [Текст] / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно–Таллин, 2007. – 458 с.
2. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 [Текст] / Н.М. Аушева. – К.: КНУБА, 2014. – 38 с.
3. Несвідоміна О.В. Побудова плоских ізометричних сіток за наперед заданими плоскими кривими [Текст] / О.В. Несвідоміна / Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон, 2017. – Том.2. – Вип.3(62). – С.298–302.

ПЛОСКИЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ СЕТИ ЗА ЗАДАНЫМ ДИСКРЕТНЫМ ТОЧЕЧНЫМ РЯДОМ

Аушева Н.Н., Несвидоміна О.В.

В работе приведены уравнения и изображения плоских изометрических сетей за наперед заданным дискретным точечным рядом и основными методами его интерполяции и аппроксимации.

Ключевые слова: кривая Лагранжа, кривая Безье, дробно-рациональная кривая, изотропная кривая, изометрическая сетка.

PLANE ISOMETRIC GRIDS FOR A SPECIFIED DISCRETE RANGEPOINTS

Ausheva N., Nesvidomina A.

In the paper, equations and images of plane isometric networks are given behind a preassigned discrete point series and the basic methods of interpolation and approximation.

Keywords: Lagrange curve, Bezier curve, fractional-rational curve, isotropic curve, isometric grid.