УДК 519.85

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА В ВИДЕ НЕЧЕТКОЙ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ И НЕЧЕТКОГО ГРАФА СОСТОЯНИЙ

Барышевский С.О., к.ф.-м.н.
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

Рассмотрено применение к представлению нечетких цепей Маркова в виде нечеткой переходной матрицы и нечеткого графа состояний нечеткой математики и теории нечетких графов.

Ключевые слова: нечеткая математика, гауссово нечеткое число, нечеткая вероятность, нечеткая матрица, нечеткий граф.

Постановка проблемы. Нечеткая марковская цепь является одной из моделей неопределенности, в которой сочетаются случайность и нечеткость, что в свою очередь приводит к появлению понятия нечеткой вероятности. В классической теории вероятность есть детерминированная характеристика возможности появления события в определенных условиях. Вместе с тем, в реальной жизни эта возможность может неконтролируемым образом зависеть от совокупности условий, которые сами могут измениться. В этих случаях вероятность естественно списывать нечетким числом с функцией принадлежности, параметры которой оцениваются статистически по совокупности испытаний [1]. Нечеткие марковские процессы с дискретными состояниями удобно представлять и иллюстрировать с помощью нечеткой переходной матрицы [2] и нечеткого графа состояний системы, поскольку система может прибывать в одном из n состояний и для каждого момента времени t необходимо задать n^2 вероятностей перехода P_{ij}.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [1] рассмотрены основы теории и практические приложения нечеткой математики. В работе [3] рассматриваются основы нечеткой дискретной математики с привлечением аппарата нечеткой логики.

Работа [2] посвящена рассмотрению основных понятий, которые характеризуют нечеткий марковский случайный процесс.

Формулировка целей статьи. В данной работе мы предлагаем рассмотрение представления нечетких целей Маркова в виде нечеткой переходной матрицы и нечеткого графа состояний с привлечением аппарата нечеткой математики и теории нечетких графов.

Основная часть. Нечеткий случайный процесс будем называть нечеткой марковской цепью, если для каждого k-го шага случайная последовательность событий (состояний) S(0),S(1),…,S(k), нечеткая вероятность перехода из любого состояния S_i в любое S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_j. Начальное состояние S(0) может быть заданным заранее или случайным.

Нечеткие вероятности цепи Маркова будем называть вероятности $P_i(k)$ того, что после k-го шага (и до(k+1)-го) система S будет находится в состояние $S_i(i = 1,2, \dots , n)$. Очевидно что для любого k

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} P_i(k) \approx \widetilde{1},$$

где $P_i(k)$ – нечеткие числа, $\widetilde{1}$ – нечеткая единица, модальное значение (ядро) которой равно 1.

Если начальное состояние системы S в точности известно S(0)= S_i, то начальная вероятность $P_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Нечеткой вероятностью перехода (переходной вероятностью) на k-ом шаге из состояния S_i в состояние S_j будем называть нечеткую условную вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии S_jпри условии, что непосредственно перед этим (после k-1 шага) она находилась в состоянии S_i.

Поскольку система может пребывать в одном из n состояний, то для каждого момента времени t необходимо задать n^2 нечетких вероятностей перехода P_{ij}, которые удобно представить в виде следующей нечеткой матрицы:

$$A = \left(P_{ij}\right) = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где P_{ij} – нечеткая вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j; P_{ij} – нечеткая вероятность задержки в состояние S_i. Здесь P_{ij} являются нечетким гауссовыми числами с соответствующими функциями принадлежности:

$$\mu\left(P_{ij}\right) = exp\left\{-\frac{(P_{ij} - \overset{\circ}{P}_{ij})^2}{2\delta_{ij}^2}\right\}, \qquad \delta_{ij}^2 \to \sigma_{ij}^2,$$

где $\overset{\circ}{P}_{ij}$ - модальное значение (ядра) нечетких чисел $\overset{\circ}{P}_{ij}$, σ_{ij}^2 – коэффициенты концентрации (носители).

Матрица (2) называется нечеткой переходной или матрицей нечетких переходных вероятностей.

Если нечеткие переходные вероятности н зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая нечеткая марковская цепь называется однородной.

Отметим некоторые особенности нечеткой матрицы, которые образуют переходные вероятности нечеткой однородной цепи Маркова.

- Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а её элементы представляют собой нечеткие вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного (из i-го) состояния, в том числе переходов в самое себя.

- Элементы столбцов показывают нечеткие вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное (j-е) состояние (иначе говоря, строки характеризуют нечеткую вероятность перехода системы из состояния, столбец – в состояние).

- Сумма нечетких вероятностей каждой строки нечетко равна нечеткой единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} \approx \tilde{1}, i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

- По главной диагонали матрицы нечетких переходных вероятностей стоят нечеткие вероятности того, что система не выйдет из состояния S_i, и останется в нем.

Нечеткие марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью нечеткого графа состояний. Пример нечеткого графа состояний системы S представлены на рис.1., где кружками обозначены состояния $S_1, S_2, \ldots$ системы S, а нечеткими стрелками (ориентированными ребрами) – возможные переходы из состояния в состояние.

На нечетком графе отличаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии будем изображать нечеткой дугой, которая направлена из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

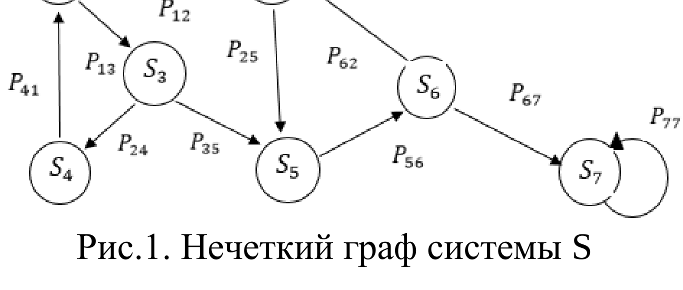

Рис.1. Нечеткий граф системы S

Если для нечеткой однородной марковской цепи заданы нечеткое начальное распределение переходимых вероятностей (P_{ij}), то нечеткие вероятности состояний системы $P_i(k)\ (i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n})$ определяются рекуррентной формуле:

$$P_i(k) \approx \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ij}, (i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n}) \quad (4)$$

Так как в данной работе вероятности являются гауссовыми нечеткими числами, то для нахождения их численных значений требуется определить основные операции над этими числами. В работе [1,2] представлены правила выполнения этих операций (правила суммирования и вычитания, правила умножения и деления).

Литература

1. Раскин Л.Г., Серая О.В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.
2. Гончар Т.А., Нечеткие однородные цепи Маркова / Т.А. Гончар, С.О. Барышевский // Международный студенческий научный вестник. - №5. – Часть 4. – М.: Академия Естествознания 2017 – С. 470-471.
3. Берштейн Л.С. Нечеткие графы и гиперграфы/Л.С. Берштейн, А.В. Боженюк. – М.: Научный мир, 2005 – 256 с.
4. Барышевский С.О. Графоаналитический метод решения нечетким матричных игр. // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – С.3-8.

ПРЕДСТАВЛЕННЯ НЕЧІТКИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА У ВИГЛЯДІ НЕЧІТКОЇ МАТРИЦІ ПЕРЕХОДУ І НЕЧІТКОГО ГРАФА СТАНУ

Баришевський С.О.

Розглянуто застосування до представлення нечітких ланцюгів Маркова у вигляді нечіткої матриці переходу і нечіткого графу стану нечіткої математики і теорії нечітких графів.

Ключеві слова: нечітка математика, гаусове нечітке число, нечітка ймовірність, нечітка матриця, нечеткий граф.

REPRESENTATION OF FUZZY MARKOV CIRCUITS AS A FUZZY TRANSITION MATRIX AND FUZZY COSTS OF STATES

Barishevskiy S.

The application to the representation of fuzzy Markov chains in the form of fuzzy transition matrix and fuzzy graph of fuzzy mathematics and fuzzy graph theory is considered.

Keywords: fuzzy mathematics, Gaussian fuzzy number, fuzzy probability, fuzzy matrix, fuzzy graph.