УДК 519.24(075.8)

ФАЗОВІ ТРАЄКТОРІЇ В СИСТЕМІ ЗВ'ЯЗАНИХ ЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Єремєєв В.С., д.т.н.,
Кузьминов В.В.,
Шаров С.В., к.пед.н.
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

Запропонована математична модель для проведення аналізу коливальних процесів в системі пов'язаних гармонійних осциляторів з різними характеристиками в умовах зовнішнього навантаження. Розроблена програма, що дозволяє побудувати траєкторії коливань у фазовому просторі, знайти тимчасові залежності відхилень та швидкості відхилення для кожного елементу. Проведені тестові випробування моделі і наведені приклади фазових траєкторій коливальних процесів.

Ключові слова: мова програмування, математична модель, програма, система осциляторів, осцилятор, фазові траєкторії, фазовий портрет, чисельні методи.

Постановка проблеми. Динамічний стан системи пов'язаних осциляторів визначається завданням координат кожного елементу у вигляді функцій від часу $x_1(t)$, $x_2(t)$,…$x_n(t)$. Множина можливих станів коливальної системи утворює фазовий простір з n ступенями свободи. Метод дослідження коливань з використанням фазових траєкторій запропонований в роботах Л.І. Мандельштама [1]. Кожній точці S(t) фазового простору відповідає множина функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$,…$x_n(t)$. Стан коливальної системи визначається траєкторією переміщення точки S(t). Сімейство фазових траєкторій утворює фазовий портрет, що визначає поведінку системи. Аналіз фазового портрета дозволяє отримати корисну інформацію про коливальну систему навіть у тих випадках, коли аналітичне рішення задачі виявляється важким або неможливим. Тому розробка методів побудови фазових траєкторій та фазового портрета в цій ситуації має практичне та актуальне значення.

Теорія коливань математичних маятників з однією і двома ступенями свободи викладена у ряді публікацій [1,с.444-450], [2,с.157-171], [3,с.230-231]. Аналіз динамічних процесів в системі з 4 і більше ступенями свободи для елементів, що коливаються, з різними характеристиками, відбувається з певними труднощами. Аналітичне рішення задачі в цьому випадку не представляється можливим, тому чисельний метод є єдиним способом рішення задачі [2,с.186-207]. У роботі [4] на основі простої математичної моделі запропонований алгоритм і розроблена комп'ютерна програма, яка дозволяє досліджувати коливання в системі пов'язаних осциляторів. Ця робота присвячена освітленню методу побудови фазових траєкторій стосовно системи пов'язаних гармонійних осциляторів з різними характеристиками з чотирма і більше ступенями свободи в умовах зовнішнього навантаження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Фазові портрети в системі з числом ступенів свободи n = 1,2 детально розглянути у працях [1; 2,с.75-81]. При досить великому значенні n > 100 завдання зводиться до розв'язання хвильового рівняння для суцільного твердого тіла, яке розглянуто у багатьох публікаціях [5; 6]. Проміжний випадок при n = [4…20] залишається мало дослідженим. Наші дослідження дозволяють якісно підійти до вивчення коливальних процесів в цій області, де отримання аналітичного рішення зустрічається з великими труднощами.

Формування цілей статті. Розглянемо систему пружинних осциляторів з різними масами m_i і коефіцієнтами жорсткості пружин k_i, представлених на рис. 1. Нехай лівий кінець пружини першого осцилятора закріплений, як показано на рис. 1, а на крайню праву масу діє сила F(t).

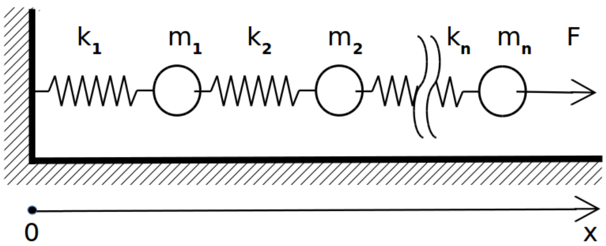

Рис.1. Система n пружинних осциляторів із зовнішньою збуджуючою силою

Коливання в системі осциляторів з однаковими масами під дією сили виду:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \qquad (1)$$

досліджувалися в роботі [4]. У статті розглянутий випадок пов'язаних осциляторів з різними характеристиками елементів при довільному силовому навантаженні. Завдання дослідження полягало у розробці чисельного алгоритму аналізу фазових траєкторій в системі пов'язаних гармонійних осциляторів.

Основна частина. Згідно другого закону Ньютона, прискорення руху елементу з масою m_i, зображеного на рис.1, під дією сил пружності без урахування сил тертя визначається рівнянням $m_i \ddot{x}_i(t) = \sum_i F_i$, де x_i, – зміщення елементу, $\sum_i F_i$ – сума сил з боку лівої і правої пружин, рівна $k_i(x_{i-1}-x_i)+ k_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$, де k_i – коефіцієнт жорсткості пружини. У цьому випадку, математична модель коливального процесу в системі n пов'язаних осциляторів під дією сили $F(t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} & v_i(t) = \dot{x}_i(t); \\ & \dot{v}_i(t) = \frac{1}{m_i}(k_i(x_{i-1} - x_i) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \delta_n^i F(t); \quad i = 1,2,..n \\ & x_0 = 0, x_{n+1} = 0, k_{n+1} = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

де $v_i = \dot{x}_i(t)$ – швидкість відхилення, $\dot{v}_i(t)$ – прискорення, δ_i^j – символ Кронекера: δ_i^j =0 при $i \neq j$, δ_i^j =1 при $i=j$.

Алгоритм чисельного рішення системи диференціальних рівнянь (2) з початковими умовами $x_i(0)= x_{i0}$, $v_i(0)= v_{i0}$ був запропонований раніше в роботі [4]. Для проведення обчислень була розроблена комп'ютерна програма Oscil з використанням алгоритмічної мови програмування C++ в інтегрованому середовищі C++ Builder 2009. Програма дозволяє досліджувати коливальний процес у системі з n осциляторів з різними характеристиками під дією зовнішнього навантаження. Початкові дані для проведення розрахунків вводяться з клавіатури або з текстового файлу. Результати обчислень відображаються на екрані дисплея. Зокрема, передбачена можливість виведення залежності швидкості руху елементу з масою m_i від його зміщення, тимчасової залежності його відхилення та швидкості руху, інші характеристики коливальної системи.

Тестування програми проводилося шляхом порівняння вичислених тимчасових залежностей відхилення x(t), швидкості відхилення v(t) і траєкторії фазового портрета з відомим аналітичним рішенням для одного гармонійного осцилятора x(t) = Acos(ωt+φ)+Bcos(ωt+φ) [3,c.230-231]. На рис. 2 наведений графік тимчасової залежності та фазовий портрет коливань, що відображені на екрані дисплея з використанням програми Oscil за наступних початкових умов в нормованому виді x (0) =0.5, v (0) =0, k=1, m=1, ω=1, φ=0. Відносна помилка розрахованих відхилень після 1000 осциляцій не перевищувала 0.001.

Як приклад, розглянемо коливання в системі з 4 осциляторів с одиничними масами, з коефіцієнтами жорсткості 0.5, 1, 0.8, 1.5 під дією сили F(t)=0.2cos(3t+0.1) – 0.1cos (5t-0.3). Початкові відхилення в розрахунках були прийняті рівними 0.2, 0.1, - 0.1, 0.1, початкові швидкості – рівними 0.5, - 0.5, 0.3, 0.1, час спостереження дорівнює 50. Фазові портрети осциляцій представлені на рис.3.

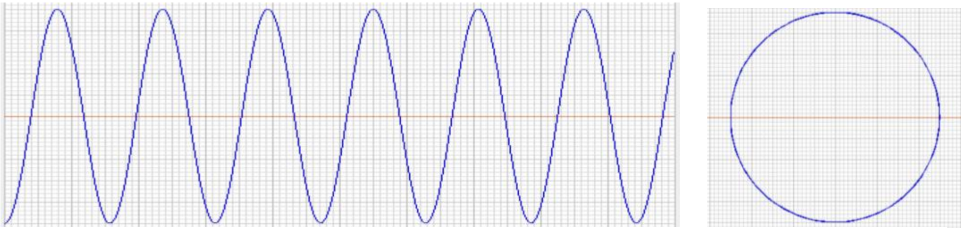

Рис.2. Графік тимчасової залежності відхилення і фазовий портрет, побудований з використанням програми Oscil

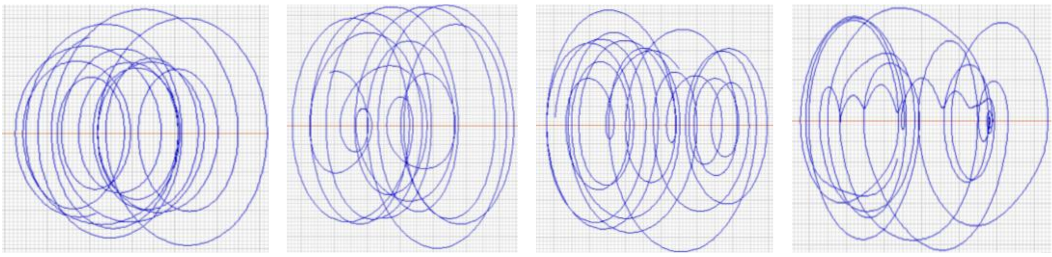

Рис.3. Фазові портрети коливань в системі з 4 осциляторів з різними характеристиками під дією сили F(t)=0.2cos (3t+0.1) - 0.1cos (5t-0.3)

Висновки. Коливальні процеси осциляторів в пов'язаних системах супроводжуються взаємним впливом сусідніх елементів один на одного внаслідок обміну енергіями, після чого коливання перестають бути гармонійними. Аналітичне рішення відповідних завдань у разі великої кількості ступенів свободи неможливе, тому чисельні методи можна вважати єдиним способом для аналізу траєкторій коливань. Запропонована математична модель дозволяє отримати повну інформацію про тимчасові залежності відхилень та швидкості відхилень, а також фазовий портрет кожного елементу. Тестові розрахунки, результати яких наведені на рис. 2, показали високу точність обчислень. Химерна форма фазових портретів, представлена на рис. 3, відбиває складну картину коливань в системі з декількох осциляторів в умовах зовнішнього навантаження. У наведеному прикладі говорити про періодичні коливання не доводиться, хоча можна стверджувати, що траєкторії коливань усіх осциляторів знаходяться в кінцевій області фазового простору. Запропонований підхід дозволяє узагальнити отримані дані на випадок нелінійних коливань, врахувати тертя в системі та проаналізувати резонансні явища.

Література

1. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 471 с.
2. Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. Учебное пособие / Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.– 416 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. Том I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1970. – 528с.

4. Еремеев В.С. Моделирование колебательных процессов в цепочке линейных осцилляторов / [В.С. Еремеев Кузьминов В.В., Попазов Н.В., Гулынина Е.В.] // Сборник научных докладов XXV Международной научно-практической конференции «Научные основы современного прогресса». – Минеральные Воды: Копир. множ. бюро СКФ БГТУ им. В.Г. Шухова, 2017 – №1(3).– С.120–124.
5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: учеб. пособ. для студентов физ.-мат. спец. ун-тов. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
6. Ruzzene M. One Dimensional (1D) and Two-Dimensional (2D) Spring Mass Chains/ M. Ruzzene, D. Guggenhe, G. Woodruff // School of Aerospace Engineering, School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology (Atlanta. June 21 – 25). – 2010. – P. 53.

ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Еремеев В.С., Кузьминов В.В, Шаров С.В.

Предложена математическая модель для проведения анализа колебательных процессов в системе связанных гармонических осцилляторов с различными характеристиками при наличии внешней нагрузки. Разработана программа, которая позволяет построить траектории колебаний в фазовом пространстве, а также найти временные зависимости отклонений и скоростей отклонения для каждого элемента. Проведены тестовые испытания модели и приведены примеры фазовых траекторий колебательных процессов.

Ключевые слова: язык программирования, математическая модель, программа, система осцилляторов, осциллятор, фазовые траектории, фазовый портрет, численные методы.

MODELING OF OSCILLATORY PROCESSES IN THE SYSTEM OF LINEAR OSCILLATORS

Eremeev V., Kuzminov V., Sharov S.

A mathematical model is offered for realization of analysis of shake processes in the system of the constrained harmonic oscillators with different descriptions at presence of the external loading. A program is developed that allows constructing vibration paths in the phase space, as well as finding the time dependencies of deviations and deviation rates for each element. The test tests of model are conducted and examples of phase trajectories of shake processes are made.

Keywords: programming language, mathematical model, program, oscillator system, oscillator, phase trajectories, phase portrait, numerical methods.