УДК 514.18

# MAPLE-МОДЕЛЬ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ПЛОЩИНІ, ЯКА ЗДІЙСНЮЄ ПОСТУПАЛЬНІ КОЛИВАННЯ В ПРОСТОРІ

Несвідомін В.М., д.т.н.,
Бабка В.М., к.т.н., доц.,
Несвідомін А.В., к.т.н.
*Національний університет біоресурсів і природокористування України(м. Київ)*

***Розроблено maple–модель дослідження руху частинки по шорсткій площині, яка здійснює поступальні коливання. Наведено траєкторно-кінематичні властивості руху частинки у горизонтальній площині, що коливається по параболі у вертикальній площині.***

***Ключові слова: шорстка площина, коливальне переміщення, рух частинки, диференціальні рівняння, траєкторія, швидкість.***

***Постановка проблеми.*** У багатьох технологічних процесах виникає рух частинки по шорсткій площині, яка в свою чергу здійснює задані переміщення в просторі. Наприклад, в очисних машинах зернового вороху має місце рух зернівки по похилій шорсткій площині, яка виконує поступальні коливання у вертикальному напрямку. Складність дослідження руху частинки по рухомих шорсткій площині залежить від їх положення, різноманітності законів руху площини та початкових умов кидання частинки у площині. Рішення цієї проблеми можливе за рахунок розробки комп'ютерної моделі, яка б охоплювала багатоманітні закони руху шорсткої площин та забезпечила інтерактивний режим дослідження.

***Аналіз останніх досліджень і публікацій.*** В класичних працях [2, 3] наведено аналітичні основи руху частинки по шорстких поверхнях робочих органів с.-г. машин. Використання супровідного тригранника траєкторії для опису руху частинки по шорсткій поверхні розкрито в праці [4].

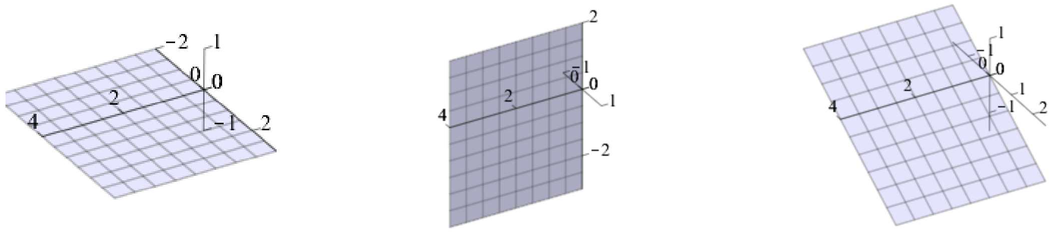
***Формулювання цілей статті.*** Розробити аналітичне та програмне забезпечення для середовища символьної алгебри Maple [1] комп'ютерну модель дослідження руху частинки по шорсткій площині, яка здійснює задані поступальні коливання у просторі.

**Основна частина**. Розроблена модель руху частинки по рухомій шорсткій площині складається із 3-х блоків: 1) задання та аналізу вихідних умов; 2) формування закону руху; 3) візуалізації результатів дослідження.

Розрізняють три характерних положень площини в тривимірному просторі – вертикальне, горизонтальне та нахилене (рис.1). Параметричне рівняння площини з віссю $Ox$ декартової системи координат $Oxyz$ є:

$$\boldsymbol{R}(u,v) = \boldsymbol{R}[u,\ v\,cos(\xi)\,,v\ sin(\xi)], \quad (1)$$

де $\xi$ – кут нахилу площини $\boldsymbol{R}(u,v)$ до площини $Oxz$.



а) б) в)

Рис.1. Характерні положення площини в тривимірному просторі

Переміщення площини $\boldsymbol{R}(u,v)$ в просторі може відбуватися по самим різноманітним законам. Обмежимося поступальним переміщенням площини $\boldsymbol{R}(u,v)$, при якому будь-яка пряма в площині $\boldsymbol{R}(u,v)$ при її переміщення в просторі залишається паралельною сама собі. Для всіх цих випадків переносна траєкторія $\boldsymbol{H}(u,v,t)$ площини $\boldsymbol{R}(u,v)$ в декартовій системі координат $Oxyz$ є сума вектору координат точки площини $\boldsymbol{R}(u,v)$ та вектор-функції паралельного перенесення $\boldsymbol{M}[x(t),y(t),z(t)]$:

$$\boldsymbol{H}[x(u,v,t),y(u,v,t),z(u,v,t)] = \boldsymbol{R}[u,\ v\,cos(\xi)\,,\ v\,sin(\xi)] + \boldsymbol{M}[x(t),y(t),z(t)], \quad (2)$$

де $t = [0;t_n]$ – час (незалежний параметр);

$\boldsymbol{M}[x(t),y(t),z(t)]$ – напрямна крива в системі координат $Oxyz$.

Векторне рівняння руху частинки у шорсткій площині, яка здійснює поступальні переміщення в просторі має вигляд:

$$m\,\boldsymbol{w} = mg\,\boldsymbol{G} - f\left(\pm F_g\,cos\big(\widehat{\boldsymbol{N},\boldsymbol{G}}\big) \pm F_C\,cos\big(\widehat{\boldsymbol{N},\boldsymbol{n}}\big)\right)\boldsymbol{\tau_\rho}, \quad (3)$$

де $m$ – маса частинки;

$\boldsymbol{w}$ - вектор абсолютного прискорення частинки;

$\boldsymbol{\tau_\rho} = \frac{\boldsymbol{V_\rho}}{|\boldsymbol{V_\rho}|}$ - одиничний вектор відносної швидкості частинки;

$\boldsymbol{N}$ - вектор нормалі вздовж траєкторії у відносному русі частинки;

$\boldsymbol{G} = [0,0,-1]$ - одиничний вектор сили тяжіння;

$F_g = mg$ - сила тяжіння, $g = 9{,}81$ *м/с*$^2$;

$F_C = m\,V^2\,k$ - відцентрова сила, де $V$ - абсолютна швидкість частинки, а $k$ - кривина абсолютної траєкторії частинки.

В проекціях на орти $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{R}'_u$ і $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{R}'_v$ тригранника $\boldsymbol{OuvN}$ векторне рівняння руху частинки у функції параметра часу $t$ буде мати вигляд (4):

$$\begin{cases} Ou := \ m\,W\,cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}'_u, \boldsymbol{w}}\right) \ = F_g \ cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}'_u, \boldsymbol{G}}\right) - f\,F_N\,cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}'_u, \tau}\right) \\ Ov := \ m\,W\,cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}'_v, \boldsymbol{w}}\right) = F_g \ cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}'_v, \boldsymbol{G}}\right) - f\,F_N\,cos\left(\widehat{\boldsymbol{R}'_v, \tau}\right) \end{cases}. \quad (4)$$

Вище наведене аналітичне забезпечення складає основу розробленого додатку до системи комп’ютерної алгебри Maple [1] дослідження руху частинки по шорсткій площині $\boldsymbol{R}$, яка здійснює поступальні переміщення за довільними напрямними $\boldsymbol{M}[x(t), y(t), z(t)]$. В середовищі Maple автоматично формується закон руху частинки (4), рівняння яких є настільки громіздкими, що приводити їх тут не має можливості.

Приклад. Нехай горизонтальна площина $\boldsymbol{R}[u, v, 0]$ здійснює зворотно-поступальні переміщення у вертикальній площині по параболі виду:

$$\boldsymbol{M}(t) = [a\,sin(vt + \theta),\ 0,\ b\,sin^2(vt + \theta)\ ], \quad (5)$$

звідки отримаємо її переносну траєкторію $\boldsymbol{H}[x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)]$:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}[u, v, 0] + \boldsymbol{M}[a\,sin(vt + \theta),\ 0,\ b\,sin^2(vt + \theta)\ ] = \boldsymbol{H}[u + a\,sin(vt + \theta)\,, v,\ b\,sin^2(vt + \theta)]. \quad (6)$$

де $v$ - кутова швидкість, рад/с;

$\theta$ - кут початкового положення площини, рад.

На рис.2,а побудовано п’ять положень горизонтальної площини $\boldsymbol{R}$, всі точки якої переміщаються по параболі (5). Площина починає рухатися з нижньої точки до верхньої в напрямку осі $Ox$, а потім повертається назад.

Траєкторно-кінематичні властивості кинутої частинки в рухомій горизонтальній площині $\boldsymbol{R}$ залежать від семи змінних параметрів:

1. $a, b$ – параметрів форми траєкторій точок площини $\boldsymbol{R}$;
2. $v,\ \theta$ – кутової швидкості руху площини $\boldsymbol{R}$ та її початкового положення;
3. $\alpha_o,\ V_o$ – кута кидання частинки в площині та її початкової швидкості;
4. $f$ – коефіцієнт зовнішнього тертя частинки.

Продемонструємо вплив на рух частинки тільки одного змінного параметра – кутової швидкості $v$. На рис.2,б-є побудовано абсолютну $\boldsymbol{r}(t)$, відносну $\boldsymbol{\rho}(t)$ траєкторії, графіки абсолютної $V(t)$ та

112

відносної $V_\rho(t)$ її швидкостей та нормальної реакції $F_N(t)$ в залежності від кута $\alpha_o = -90°, -45°, 0°, 45°$ кидання частинки, коефіцієнта тертя $f = 0.3$, початкової швидкості $V_o = 6$м/с, параметрів $a = 2, b = 1$м та кутової швидкості $\upsilon = 1$ с$^{-1}$. Можна бачити по графіку відносної $V_\rho(t)$ швидкості (рис.2,д), що всі частинки зупиняться. Найпершою через $t \approx 1.3c$ зупиниться частинка, яка була кинута в протилежну сторону ($\alpha_o = -90°$) руху площини.

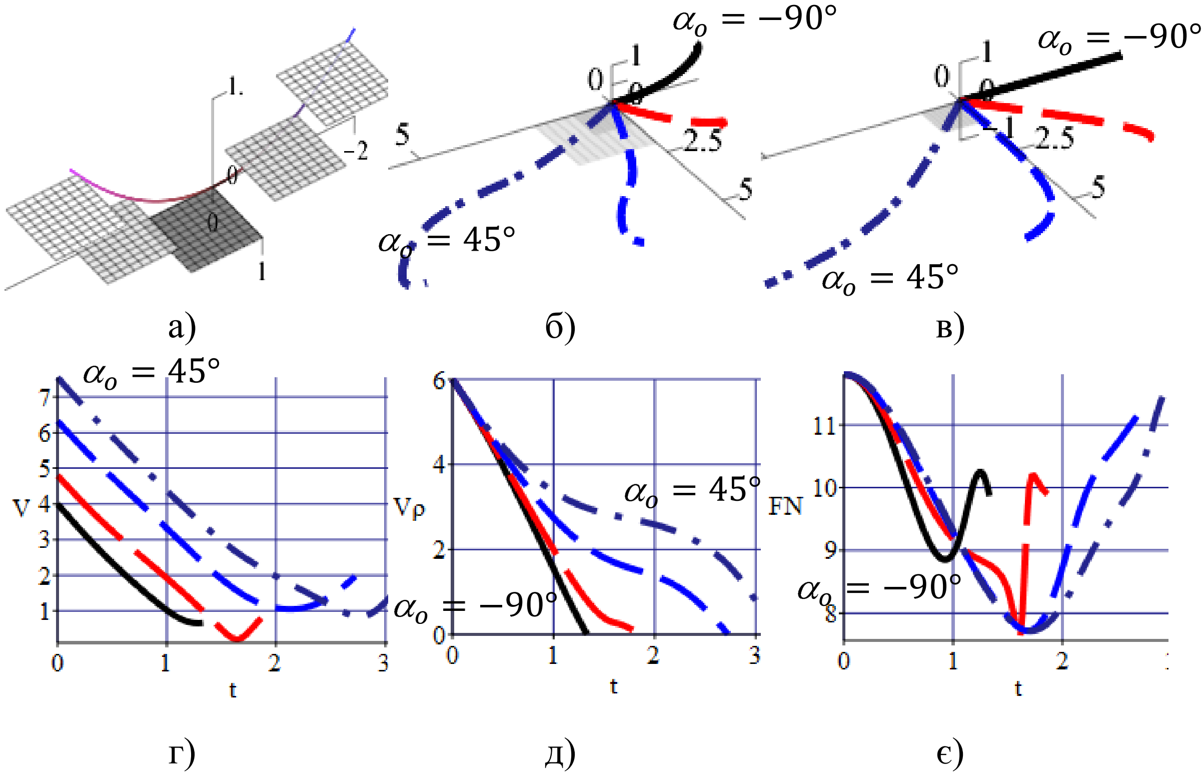
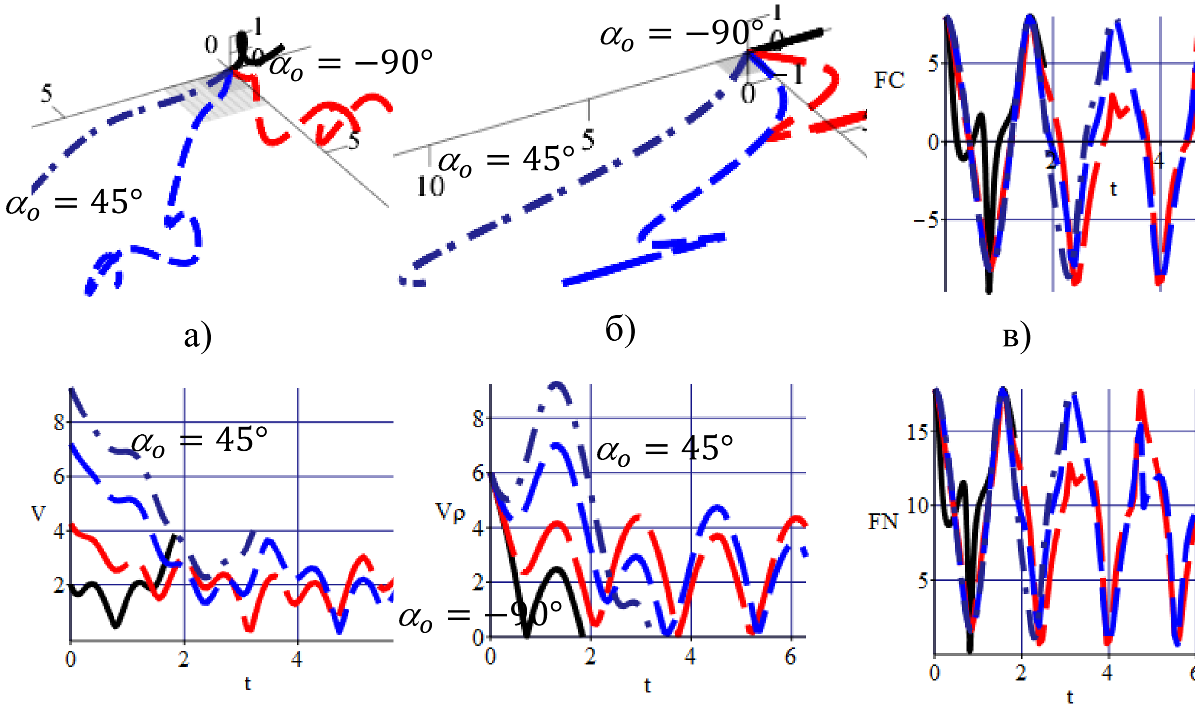



Рис.2. Абсолютні $\boldsymbol{r}(t)$, відносні $\boldsymbol{\rho}(t)$ траєкторії, графіки абсолютної $V(t)$, відносної $V_\rho(t)$ швидкостей, нормальної реакції $F_N(t)$ частинки при $\upsilon = 1$

Збільшимо кутову швидкість площини до значення $\upsilon = 2$ с$^{-1}$ (рис.3). Частинки кинуті під кутом $\alpha_o = -45°, 0°, 45°$ не зупиняться в коливальній площині ніколи. При $t > 6c$ графіки абсолютної $V(t)$ та відносної $V_\rho(t)$ швидкості частинок зигзагоподібно збігаються (рис.3,г,д), що означає перехід до стаціонарного режиму. Відносними траєкторіями $\boldsymbol{\rho}(t)$ для такого режиму є прямі лінії (рис.3,б), які паралельні площині напрямної параболи (5). Абсолютними траєкторіями $\boldsymbol{r}(t)$ після перехідного процесу будуть плоскі криві лінії, які теж паралельні площині $Oxz$ (рис.3,а). Графіки нормальної реакції $F_N(t) > 0$ та відцентрової сили $F_C(t)$ (рис.3,є,в) є конгруентними кривими. За цими графіками можна стверджувати, що найменша реакція частинки є у найвищій точці траєкторії – саме там частинка може відірватися від коливальної площини. Звернемо увагу, що тільки частинка кинута під кутом $\alpha_o = -90°$ зупиниться у площині через проміжок часу $t \approx 1.9c$ і рухатися в площині вже не буде – її абсолютна траєкторія після зупинки конгруентна параболі (5).

Збільшення кутової швидкості до значення $\upsilon = 2.2$ с$^{-1}$ призведе до відриву всіх частинок від площини через проміжок часу $t \approx 0.7c$.




а) б) в)

г) д) є)

Рис.3. Траєкторно-кінематичні властивості кинутої частинки при $\upsilon = 2$

***Висновки.*** Наведений приклад дослідження руху частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює коливальні переміщення по параболі, розкриває багатофакторність процесу, який без розробки подібних додатків до систем комп'ютерної математики здійснити повноцінне дослідження не можливо. Розкрито один із можливих законів руху шорсткої горизонтальної площини, всі точки якої в коливальному русі описують параболу у вертикальній площині. З'ясовано закономірності руху частинки по площині в залежності від величини її кутової швидкості, а саме – коли частинки зупиняться в площині, або ж постійно будуть рухатися в ній або ж відірвуться від неї.

***Література***


1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.

2. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
3. Блехман И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. – М.: Наука, 1964. – 410 с.
4. Несвідомін А.В. Комп’ютерне моделювання руху частинки по нерухомих шорстких поверхнях в проекціях на орти супровідного тригранника траєкторії: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 Прикладна геометрія та інженерна графіка / А.В.Несвідомін. – К., 2016. – 24 с.

## MAPLE-МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО ШЕРЕХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ, КОТОРАЯ СОВЕРШАЕТ ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Несвидомин В.Н., Бабка В.Н., Несвидомин А.В.

***Разработана maple-модель исследования движения частицы по шероховатой плоскости, которая осуществляет поступательные колебания. Приведены траекторно-кинематические свойства движения частицы по горизонтальной шероховатой плоскости, которая осуществляет поступательные колебания в вертикальной плоскости по параболе.***

***Ключевые слова: шероховатая плоскость, колебательное перемещение, движение частицы, траектория, скорость.***

## MAPLE-MODEL OF A PARTICLE MOVEMENT BY A ROUGHNESS PLANE, WHICH MAKES SLIDING OSCILLATIONS IN SPACE

Nesvidomin V., Babka V., Nesvidomin A.

***Trajectory-kinematic properties of the motion of a particle along a rough plane are presented, and translational oscillations are made along the parabola at the vertical plane.***

***Key words: rough plane, vibrational displacement, particle motion, trajectory, velocity.***