УДК 514.18

АНАЛІТИЧНІ УМОВИ УТВОРЕННЯ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Муквич М.М., к.т.н.*
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ),
Федорина Т.П., к.пед.н.
Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»

У роботі визначено аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній за допомогою функцій комплексної змінної. Знайдено параметричні рівняння ізотропних ліній та мінімальних поверхонь у комплексному просторі з твірними ізотропними лініями переносу.

Ключові слова: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, диференціал дуги просторової кривої, середня кривина поверхні.

Постановка проблеми. Дослідження способів знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній нульової довжини зумовлене проблемою аналітичного опису мінімальних поверхонь. Використання мінімальних поверхонь при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій має переваги практичного змісту. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною. Оболонки, які мають геометричну форму мінімальних поверхонь, володіють архітектурною виразністю, можуть перекривати складні плани без утворення розривів геометрії з джерелами виникнення напружень [1, с. 152]. Умова рівності нулю величини середньої кривини H мінімальної поверхні у всіх її точках є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні.

Задаючи мінімальну поверхню функцією $z = z(x;\ y)$, Ж. Лагранж (J. Lagrange) одним із перших зробив висновок, що функція $z = z(x;\ y)$ повинна задовольняти диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа [2, с. 683] в частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується. Одним із сучасних напрямків дослідження

* Науковий консультант – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

аналітичного опису мінімальних поверхонь є знаходження граничних умов конструювання мінімальних поверхонь, вписаних у відкриту кулю [3]. Відомими є дослідження з геометричного моделювання композитних матеріалів, які утворюють стільникову структуру [4]. Архітектура вказаних композитних матеріалів базується на періодичних мінімальних поверхнях, що дозволяє при їх використанні мінімізувати ефекти концентрації напруги, забезпечує стійкість до пошкоджень та зменшення вібрації [4].

Проблема спрощення аналітичного опису мінімальних поверхонь та отримання їх параметричних рівнянь, починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), реалізується за допомогою методів теорії функцій комплексної змінної [2, с. 685].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини. Моделювання просторових ізотропних кривих за допомогою кватерніонів у просторі R^4, розглянуто у роботі [5]. У дисертаційному дослідженні [6] знайдено аналітичний опис ізотропних кривих за формулами Шварца (H. Schwarz) на основі просторової кривої, що лежить на поверхні циліндра та на основі кривої укосу. Але використання формул Шварца для знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній пов’язане з інтегруванням складних виразів і можливе тільки в окремих випадках. У дисертаційному дослідженні [6] та у статті [7] було розглянуто окремі випадки аналітичного опису ізотропних ліній на основі рівнянь плоскої уявної кривої виду: $x(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t)$; $y(t) = f_1(t) - i \cdot f_2(t)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ – функції дійсної або комплексної змінної. Робота [8] авторів даної статті присвячена задачі аналітичного опису ізотропних ліній на основі плоскої кривої, заданої функціями натурального параметра. Не зважаючи на різноманіття відомих способів утворення параметричних рівнянь ізотропних ліній, спрощення їх аналітичного опису залишається важливою проблемою при моделюванні неперервного каркасу мінімальних поверхонь.

Формулювання цілей статті. Визначити аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній із умови рівності нулю їх диференціала дуги. За допомогою функцій комплексної змінної знайти параметричні рівняння ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь.

Основна частина. Розглянемо твердження, у якому визначено аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної.

Твердження. *Нехай функції* $u = u(t)$; $v = v(t)$ *задовольняють* *рівність:* $u^2(t)+v^2(t)=1$. *Тоді просторова крива, задана рівняннями:*

$$x=\int\left(u+\frac{1}{2(v-u)}\right)dt;\quad y=\int\left(v-\frac{1}{2(v-u)}\right)dt;\quad z=\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{v-u} \qquad (1)$$

є ізотропною лінією нульової довжини.

Доведення. Запишемо рівняння ізотропної лінії у вигляді:

$$x(t)=p(t)-i\cdot f(t);\quad y(t)=q(t)+i\cdot f(t);\quad z=z(t), \qquad (2)$$

де $p(t)$, $q(t)$, $f(t)-$диференційовані на деякому проміжку функції, $i-$уявна одиниця. Тоді вираз диференціала дуги ізотропної лінії має вигляд:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{dp}{dt}\right)^2-2i\frac{dp}{dt}\frac{df}{dt}-\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2+2i\frac{dq}{dt}\frac{df}{dt}-$$

$$-\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2+2i\frac{df}{dt}\left(\frac{dq}{dt}-\frac{dp}{dt}\right)-2\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Диференціал дуги ізотропної лінії дорівнює нулю при одночасному виконанні умов:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2=1;\quad 2i\frac{df}{dt}\left(\frac{dq}{dt}-\frac{dp}{dt}\right)=-1;\quad -2\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0.$$

Із останніх рівностей виразимо: $\dfrac{df}{dt}=-\dfrac{1}{2i\left(\dfrac{dq}{dt}-\dfrac{dp}{dt}\right)}$ та $\dfrac{dz}{dt}=\sqrt{2}\dfrac{df}{dt}$,

тоді отримаємо:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dp}{dt}-i\frac{df}{dt}=\frac{dp}{dt}+\frac{1}{2\left(\dfrac{dq}{dt}-\dfrac{dp}{dt}\right)};$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dq}{dt}+i\frac{df}{dt}=\frac{dq}{dt}-\frac{1}{2\left(\dfrac{dq}{dt}-\dfrac{dp}{dt}\right)};\quad \frac{dz}{dt}=\sqrt{2}\frac{df}{dt}=\frac{i}{\sqrt{2}\left(\dfrac{dq}{dt}-\dfrac{dp}{dt}\right)}. \qquad (3)$$

Інтегруючи рівності (3) та увівши заміну $u(t)=\dfrac{dp}{dt}$; $v(t)=\dfrac{dq}{dt}$, отримаємо параметричні рівняння (1) ізотропної лінії.

Твердження доведено.

Приклад. Знайдемо параметричні рівняння ізотропної лінії за формулами (1) для функцій $u(t)=\sin(kt); v(t)=\cos(kt)$, де $k\in R$.

Тоді за формулами (1) отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної лінії:

$$x(t)=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arth}\left(\frac{1+tg\left(\frac{kt}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)-\cos(kt)\right];$$
$$y(t)=\frac{1}{k}\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arth}\left(\frac{1+tg\left(\frac{kt}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)+\sin(kt)\right];\quad z(t)=\frac{i}{k}\operatorname{Arth}\left(\frac{1+tg\left(\frac{kt}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right). \tag{4}$$

Здійснимо для функцій комплексної змінної (4) заміну: $t=u+i\cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину, отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$X(u,v)=-\frac{\cos(ku)\operatorname{ch}(ku)}{k}+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}k}\left[\ln\left((1+m(u;v))^2+n(u;v)\right)-\ln\left((1-m(u;v))^2+n(u;v)\right)\right];$$
$$Y(u,v)=\frac{\sin(ku)\operatorname{ch}(kv)}{k}+ \tag{5}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}k}\left[\ln\left((1-m(u;v))^2+n(u;v)\right)-\ln\left((1+m(u;v))^2+n(u;v)\right)\right];$$
$$Z(u,v)=\frac{1}{2k}\left[\operatorname{arctg} j(u;v)-\operatorname{arctg} w(u;v)\right],$$

де:

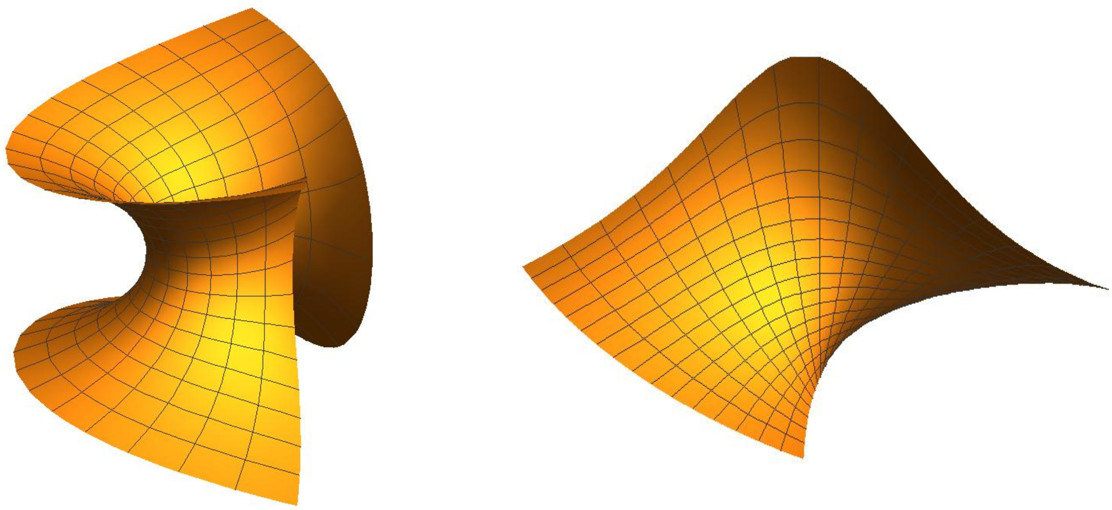
$$m(u;\,v)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\sin ku}{\cos ku+\operatorname{ch} kv}\right);\ n(u;\,v)=\frac{\operatorname{sh}^2(kv)}{2(\cos ku+\operatorname{ch} kv)^2};$$
$$j(u;v)=\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}(kv)}{\left(-2+\sqrt{2}\right)(\cos ku+\operatorname{ch} kv)+\sqrt{2}\sin ku}; \tag{6}$$
$$w(u;v)=\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}(kv)}{\left(2+\sqrt{2}\right)(\cos ku+\operatorname{ch} kv)+\sqrt{2}\sin ku}.$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u,v)=\frac{\sin(ku)\operatorname{sh}(kv)}{k}+\frac{1}{2\sqrt{2}k}\left(\operatorname{arctg} w(u;v)-\operatorname{arctg} j(u;v)\right);$$
$$Y^*(u,v)=\frac{\cos(ku)\operatorname{sh}(kv)}{k}+\frac{1}{2\sqrt{2}k}\left(\operatorname{arctg} j(u;v)-\operatorname{arctg} w(u;v)\right); \tag{7}$$
$$Z^*(u,v)=\frac{1}{4k}\left[\ln\left((1+m(u;v))^2+n(u;v)\right)-\ln\left((1-m(u;v))^2+n(u;v)\right)\right]$$

У параметричних рівняннях (7) вирази $m(u;\,v), n(u;\,v),\ j(u;\,v), w(u;\,v)$ визначаються із (6).

На рис.1 (а, б) зображено мінімальні поверхні, побудовані за рівняннями (5), (7) при $k=1$; $u \in \left[-\frac{\pi}{5};\ldots\frac{\pi}{5}\right]$; $v \in [-1;\ldots 1]$.



а) б)

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь:
а) мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (5) при $k=1$;
б) приєднана мін. поверхня, побудована за рівняннями (7) при $k=1$.

Висновки. Визначені у даній роботі аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній дозволяють знайти параметричні рівняння мінімальних поверхонь. Зокрема, аналітичний опис ізотропних ліній можна знаходити на основі плоских кривих, заданих параметричними рівняннями від довжини дуги s.

Література

1. Гуляев В.И. Расчёт оболочек сложной формы [Текст] / [В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, В.В. Гайдайчук]. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Математическая энциклопедия [Электронный ресурс] / [гл. ред. И. М. Виноградов]. – Т. 3. – М.: Изд–во «Сов. энциклопедия», 1982. – С. 683–690.
3. Folha Ab. Free boundary minimal surfaces in the unit 3-ball [Text] / Ab. Folha, F. Pacard, T. Zolotareva // Manuscripta math. – 2017. – Vol. 154, Issue 3–4. – P. 359–409. Available at: https://doi.org/10.1007/s00229-017-0924-9.
4. Al-Ketan Or. Mechanical properties of periodic interpenetrating phase composites with novel architected microstructures [Електронний ресурс] / Oraib Al-Ketan, Mhd. Adel Assad, Rashid K. Abu Al-Rub // Composite Structures. – 2017. – Vol. 176 – P.9–19. Available at:

https://doi.org/ 10.1016/j.compstruct.2017.05.026.

5. Аушева Н.М. Моделювання сім’ї ізотропних просторових PH – кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною [Текст] / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №7. – С. 3–9.
6. Коровіна І. О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / І. О. Коровіна. – Київський національний університет будівництва і архітектури. – К., 2012. – 20 с.
7. Пилипака С.Ф. Конструювання мінімальних поверхонь на основі просторових ізотропних ліній [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Науковий вісник НУБіП України. Серія: техніка та енергетика АПК. – К., 2017. – Вип. 258. – С. 313–323.
8. Пилипака С.Ф. Неперевне згинання мінімальних поверхонь, утворених за допомогою евольвенти кола, заданої функціями натурального параметра / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – К., 2017.– №261.– С. 120–128.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н., Федорина Т.П.

Получены аналитические зависимости для нахождения параметрических уравнений пространственных изотропных линий. Аналитическое описание минимальных поверхностей осуществлено в комплексном пространстве с изотропными линиями в качестве линий сети переноса.

Ключевые слова: изотропная линия, минимальная поверхность, дифференциал дуги кривой, средняя кривизна поверхности.

ANALYTICAL CONDITIONS FOR THE FORMATION OF ISOTROPIC LINES FOR CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES

Pylypaka S., Mukvich M., Fedoryna T.

Analytical dependencies for finding parametric equations of spatial isotropic lines are obtained. Analytical description of minimal surfaces in complex space made of isotropic lines as lines of a translation net.

Key words: isotropic line, minimal surface, arc differential of a curve, mean curvature of surface.