УДК 515.2

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕХАОТИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ МАЯТНИКА З РУХОМИМ ПІДВІСОМ

Семків О.М. , д.т.н.,
Руденко С.Ю., к.т.н.
Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)

Наведено спосіб вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу маятників з рухомою точкою підвісу.

Ключові слова: маятник із рухомою точкою підвісу, маятник Капиці, траєкторія переміщення вантажу маятника.

Постановка проблеми. Математичні маятники з рухомою точкою підвісу являються зручними моделями для випробування методів вивчення коливальних процесів [1-3]. Цікавість викликають геометричні форми траєкторій переміщення по площині (центра) вантажу. Адже вони ілюструють розв'язки відповідних диференціальних рівнянь, які за аналогією можна використати і в подібних за змістом задачах. Наприклад, за допомогою маятника з вібруючою точкою підвісу академік П.Л.Капиця пояснював дію високочастотного генератора (ніготронома), що застосовується в ядерній фізиці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує значна кількість публікацій, присвячених математичним маятникам із рухомою точкою підвісу, серед яких чільне місце займають роботи, присвячені маятникам Капиці [1-3]. У них розглядаються різноманітні прояви феномену цього різновиду маятників. Найцікавіший із них проявляється у тому, що точка абсолютно нестійкої рівноваги для математичного маятника, може виявитися точкою стійкої рівноваги для маятника Капиці. Розглядаються задачі параметричного резонансу, коли нижнє положення рівноваги не є стійким, і амплітуда малих відхилень маятника наростає в часі. Також цікаві ефекти, коли при великій амплітуді вимушених коливань у системі можуть існувати хаотичні режими.

Ці дослідження доцільно було б доповнити графічним унаочненням результату розв'язання рівнянь, що описують динаміку коливань маятників із рухомою точкою підвісу. А саме – унаочненню траєкторій коливань вантажу з метою виявлення серед них нехаотичних траєкторій.

Формулювання цілей статті. Розробити графічний

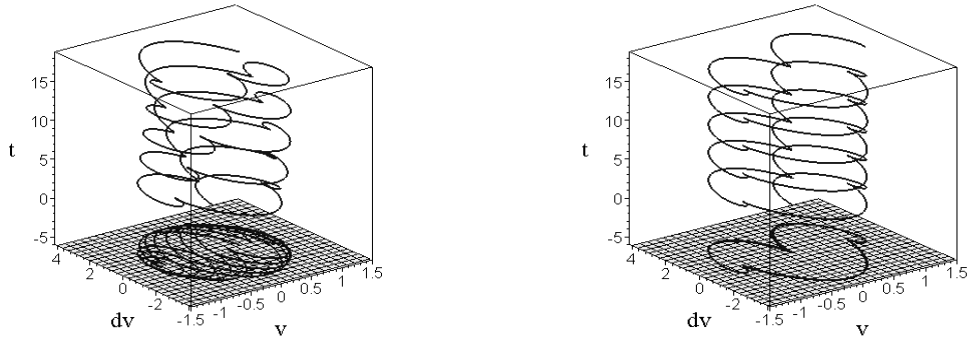
комп'ютерний метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу маятників з рухомою точкою підвісу.

Основна частина. Спочатку розглянемо випадок коливання математичного маятника, точка підвісу якого рухається вздовж горизонтальної осі *Ox*. Для опису динаміки руху використаємо [3] диференціальне рівняння:

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right)+\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right)\cos\left(v(t)\right)+g\sin\left(v(t)\right)=0. \qquad (1)$$

У формулі (1) прийнято такі позначення: v*(t)* – функція зміни величини кута відхилення маятника; *L* – довжина маятника; *f(t)* – закон зміни положення точки підвісу маятника вздовж осі *0x*; g = 9,81.

Розв'язувати рівняння (1) будемо чисельним методом Рунге-Кутти з початковими умовами: а) v (0) = v0; б) v′(0) = dv0. Для визначення значень параметрів v0 і dv0, які б забезпечили нехаотичну траєкторію руху вантажу маятника, застосуємо проекційне фокусування [4]. Для цього чисельним методом із обраними початковими умовами і з урахуванням функції *f(t)* розв'язуємо рівняння (1) і будуємо зображення інтегральної кривої у фазовому просторі {*v, dv, t*} залежно від значення «керуючого» параметра - довжини *L*. При випадкових значеннях v0 і dv0 у фазовому просторі утвориться «плутана» інтегральна крива (рис. 1а). Спроектуємо її на фазову площину {v, *dv*}, де також спостерігаємо відповідну «плутану» фазову траєкторію. При певному критичному значенні *L = L0* характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться у «закономірну» криву. На фазовій площині спостерігатиметься ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (рис. 1б). Цей процес знаходження критичних значень параметрів названо *проекційним фокусуванням*.



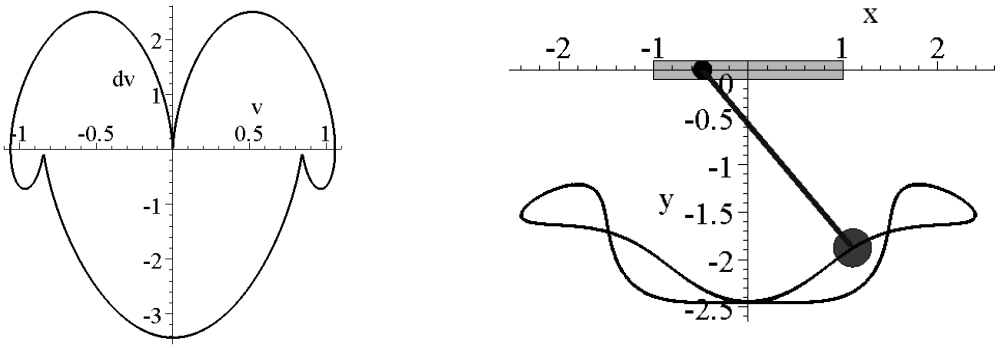
а) б)

Рис. 1. Фазові траєкторії як проекції інтегральних кривих:
а) для довільного значення «керуючого» параметра L;
б) для критичного значення «керуючого» параметра L0

Урахування критичного значення параметра *L*0 під час

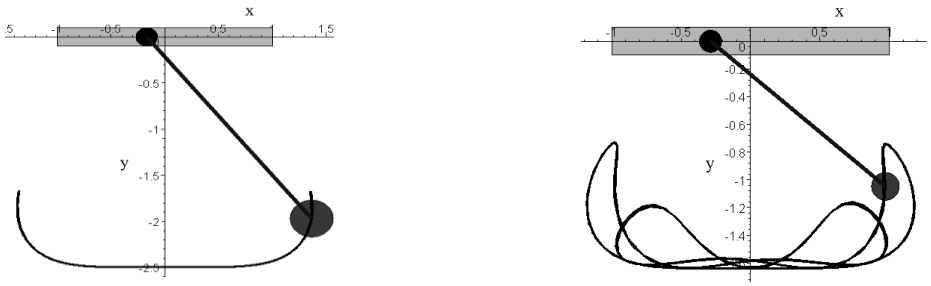
розв’язання диференціального рівняння (1) приведе до координат точок на площині {x,y}, які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії.

Наведемо приклад розв’язання системи рівнянь (1) з такими умовами: v0 =0; dv0 = 0; *f(t)* = sin(7*t*)/2. У разі зміни параметра *L*, наприклад: у межах $2 \le L \le 3$ з кроком h =0,2 одержуємо множину інтегральних кривих, одну з яких наведено на рис. 2а. Критичне значення параметра одержуємо в результаті проекційного фокусування при значенні *L*0 = 2,456, що відповідає рис. 1б та рис. 2а. На рис. 2б наведено приклад геометричного моделювання процесу коливання маятника та побудови нехаотичної траєкторії. На рис. 3 наведено інші знайдені варіанти нехаотичних траєкторій.



а б

Рис. 2. Приклад моделювання коливання маятника з параметрами: v0 = 0; dv0 = 0; L = 2,456; *f(t)* = sin(7*t*)/2; а) фазова траєкторія; б) кадр анімаційної схеми коливання маятника



а б

Рис. 3. Приклад моделювання коливання маятника з параметрами: v0 = 0; dv0 = 0; *f(t)* = sin(5*t*)/2; при а) L = 2,496333; б) L = 1,64

Далі розглянемо випадок коливання математичного маятника, точка підвісу якого рухається вздовж вертикальної осі Oy. Теорію такої коливальної системи у 1951 р. запропонував академік П.Л.Капиця [1]. Для опису динаміки руху маятника використаємо [3] диференціальне рівняння:

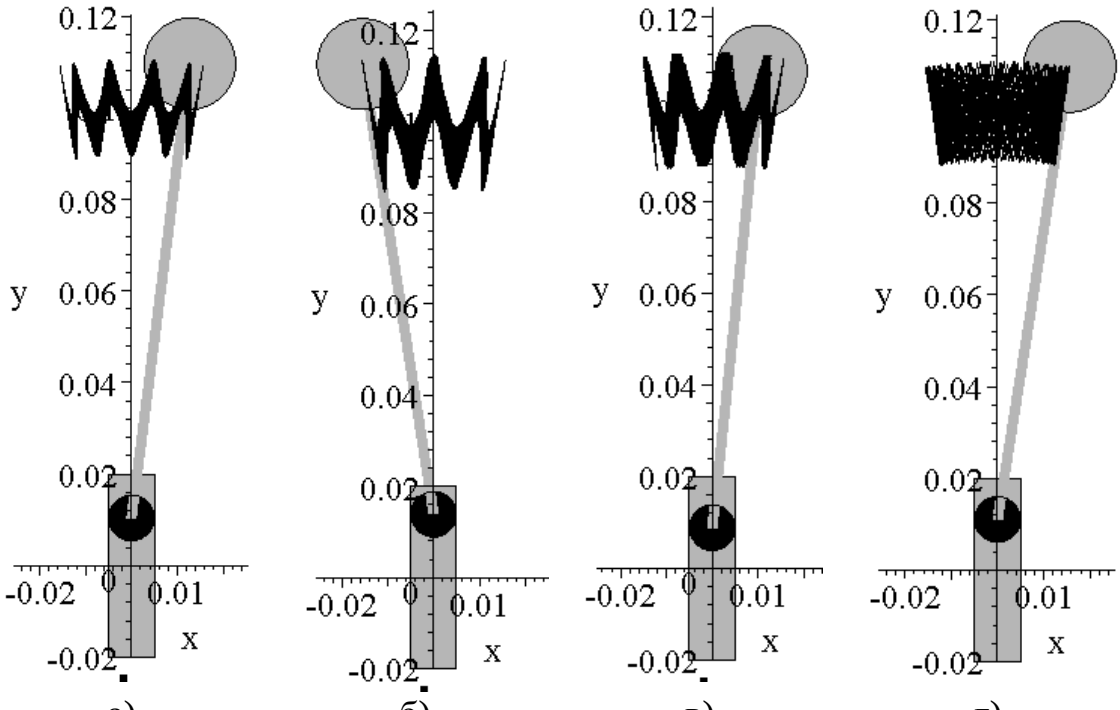
$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right)+\left(g+Aw^2\cos\left(wt\right)\right)\sin\left(v(t)\right)=0\,. \qquad (2)$$

У формулі (2) прийняті такі позначення: v*(t)* – функція зміни величини кута відхилення маятника; *L* – довжина маятника; cos*(wt)* – закон зміни положення точки підвісу маятника вздовж осі *0y*; *A* – амплітуда коливань; *w* – частота коливань; g = 9,8.

Розв'язувати рівняння (2) будемо чисельним методом Рунге-Кутти з початковими умовами: v (0) = v0; v′(0) = dv0. Для визначення значень параметрів *A* і *w*, які б забезпечили нехаотичну траєкторію руху вантажу маятника, застосуємо метод проекційного фокусування.

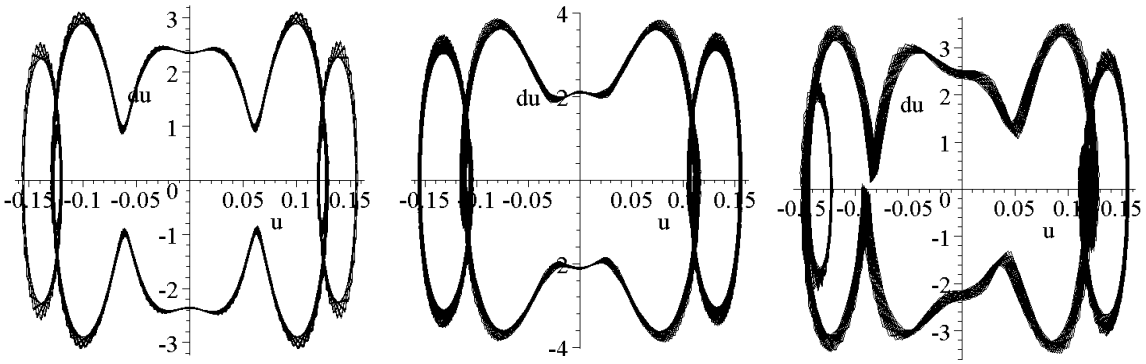
Для цього знайдемо розв'язок рівняння (2) для *L* = 0.1; *w* = 150 і з початковими умовами v0 = π/20; dv0 = 0. Методом проекційного фокусування одержимо критичні значення амплітуди коливань A, що забезпечують нехаотичні коливання вантажу.

На рис. 4. зображено приклади геометричного моделювання траєкторій вантажу маятника Капиці для знайдених значень амплітуди коливань (наведено кадри анімаційної схеми процесу коливань). На рис. 4, г для порівняння наведено приклад хаотичних коливань вантажу. На рис. 5 зображено фазові траєкторії, відповідні випадкам коливань із рис. 4.



а) б) в) г)

Рис. 4. Геометричне моделювання траєкторій
вантажу маятника Капиці
для: а) A = 0,0105; б) A = 0,01469; в) A = 0.01245; г) A = 0.011.



а) б) в)

Рис. 5. Фазові траєкторії для:
а) A = 0,0105; б) A = 0,01469; в) A = 0.01245

Висновки. Розроблено графічний комп'ютерний спосіб моделювання коливань вантажу маятників з рухомими точками підвісу з метою вибору параметрів, що забезпечують нехаотичний технологічний характер їх траєкторій. Спосіб базується на наближеному розв'язанні диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, визначенні проекції одержаної інтегральної кривої на фазову площину, та обчисленні запропонованим методом проекційного фокусування критичного значень одного з параметрів.

Література

1. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П.Л. Капица. – ЖЭТФ. –1951. – Т.21.– 588с.
2. Широносов В.Г. Резонанс в физике, химии и биологии. / В.Г.Широносов. – Ижевск: Удмуртский университет, 2000. – №1. – 92с.
3. Бутиков Е. И. Стабилизация перевернутого маятника (к 60-летию маятника Капицы) // Е.И. Бутиков. - Компьютерные инструменты в образовании, 2010. – № 5. – С. 39–51.
4. Бутиков Е.И. Маятник с осциллирующим подвесом [Електронний ресурс] / Е.И. Бутиков. – Режим доступу: http://butikov.faculty.ifmo.ru/Russian/ParamPendulum.pdf.
5. Semkiv O.M. Computer graphics of the oscillaton trajectories of 2-d spring pendulum weight / O.M. Semkiv // ORT Publishing – European Applied Sciences: challenges and solutions: 5th International scientific conference. – Stuttgart (Germany), 2015. – P. 63–70.
6. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d- пружинного маятника / О.М. Семкив // Материалы VII Междунар. конф. по научн. развитию в Евразии. – Вена (Австрия), 2015. – С.217–221.
7. Семків О.М. Метод визначення особливих траєкторій коливань вантажу 2-d – пружинного маятника / О.М. Семків // Вестник

Харьковского нац. автомобильно-дорожного университета. – Харьков: ХНАДУ, 2015. – Вып. 71. – С. 36–44.
8. Семків О.М. Визначення параметрів нехаотичних траєкторій коливань ваантажу маятника з рухомим підвісом / О.М. Семків // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Випуск 93. – К.: КНУБА, 2015. – С. 353–358.
9. Семків О.М. Визначення параметрів нехаотичних коливань вантажу маятника машини Атвуда / О.М. Семків // Прикладна геометрія та інженерна графіка – Випуск 94. – К.: КНУБА, 2016. – С. 322–327.
10. Семків О.М. Графічний комп'ютерний спосіб визначення нехаотичних траєкторій коливань маятникових систем / О.М. Семків // Вестник Харьковского нац. автомобильно-дорожного университета. – Харьков: ХНАДУ, 2016. – Вып. 72. – С. 94–101.
11. Семків О.М. Дослідження ініціювання руху візка за допомогою коливання 2d-пружинного маятника / Л.М. Куценко, О.М. Семків // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького? 2016.– Вип. 6. – С.71–76.
12. Семків О.М. Метод визначення нехаотичної траєкторії вантажу 2D-пружинного маятника / О.М.Семків // Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта. – Днепропетровск: НГУ, 2016. – С.384–393.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕХАОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗА МАЯТНИКА С ПОДВИЖНЫМ ПОДВЕСОМ

Семкив О.М., Руденко С.Ю.

Приведен способ выбора значений параметров для получения нехаотических траекторий колебаний груза маятников с подвижными точками подвеса.

Ключевые слова: маятник с подвижной точкой подвеса, маятник Капицы, траектория перемещения груза маятника.

DETERMINATION OF PARAMETERS OF NOT CHAOTIC TRAJECTORIES OF FLUCTUATIONS FREIGHT OF THE PENDULUM WITH THE MOBILE SUSPENSION

Semkiv O., Rudenko S.

The graphical computer method of modeling of fluctuations of freight of pendulums with mobile points of a suspension for the purpose of the choice of the parameters providing not chaotic nature of their trajectories is developed.

Keywords: pendulum with movable suspension point, Kapitsa pendulum, trajectory of the pendulum load.