

УДК 519.632.4

**ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ  
МОЖЛИВОСТЕЙ ПРОЦЕДУР ОПТИМІЗАЦІЇ РІЗНИХ  
МАТЕМАТИЧНИХ ПРОЦЕСОРІВ НА ЗАДАЧАХ  
РОЗЩЕПЛЕННЯ СУМІШЕЙ ЙМОВІРНІСНИХ РОЗПОДІЛІВ**

Тулученко Г.Я., д.т.н.,

Старун Н.В., к.т.н.,

Маломуж Т.В., к.т.н.

*Херсонський національний технічний університет (Україна)*

*У роботі порівнюється обчислювальні можливості процедур оптимізації пакету Optimization математичного процесору Maple, пакету Direct Search, який сумісний із МП Maple та пакету Пошук розв'язків табличного процесору Excel при розв'язанні задач розщеплення сумішей нормальних та логарифмічно нормальних ймовірнісних розподілів. На тестових прикладах показані переваги процедур пакету Direct Search.*

*Ключові слова: суміш ймовірнісних розподілів, оптимізація, Maple, пакет Direct Search.*

**Постановка проблеми.** При описі неоднорідних даних доцільним є використання сумішей ймовірнісних розподілів як математичних моделей. Найчастіше для оцінювання параметрів розподілу суміші використовують метод максимальної правдоподібності, який полягає у пошуці глобального максимуму цільової функції правдоподібності. Формально для розв'язання цієї задачі можуть використовуватися як стандартні оптимізаційні методи, так проблемно-орієнтований ЕМ-алгоритм. Складність задачі полягає у тому, що у загальному випадку функція правдоподібності має багато локальних максимумів. Через це відомі стандартні методи оптимізації та ЕМ-алгоритм у реальних задачах є недостатньо ефективними.

**Аналіз основних досліджень та публікацій.** Огляд методів розщеплення сумішей ймовірнісних розподілів наводиться, наприклад, в монографії [2]. Можливості пакету Direct Search щодо розв'язання задач нелінійної умовної оптимізації, які описані у роботі [1]. Пакет DirectSearch є сумісним із системою комп'ютерної математики Maple.

**Формулювання цілей статті.** Показати переваги застосування процедури Search пакету Direct Search при розв'язанні задач розщеплення сумішей логарифмічно нормальних ймовірнісних

розподілів порівняно із іншими процедурами сучасних пакетів оптимізації.

**Основна частина.** Нехай досліджувана випадкова величина  $X$  має емпіричний розподіл, який показано на рис. 1. Об'єм вибірки  $N = 175$ .

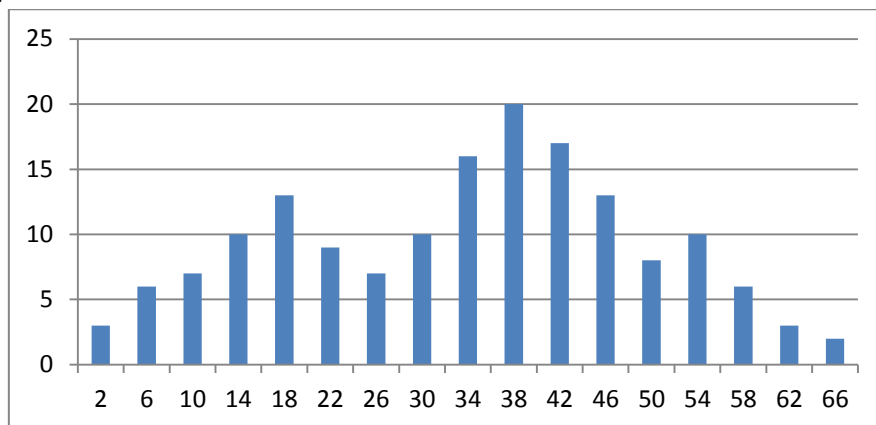


Рис. 1. Гістограма емпіричних абсолютних частот

Із рис. 1 очевидно, що досліджуваний закон розподілу є сумішшю трьох логарифмічно нормальних законів розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{j=1}^3 w_j \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot x \cdot \sigma_j}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - a_j)^2}{2 \cdot \sigma_j^2}}, & x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

де  $w_j$  – питома вага  $j$ -ої компоненти у суміші;  $w_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^3 w_j = 1$ ;  $j = \overline{1;3}$ ;

$a_j$  – математичне сподівання;

$\sigma_j$  – середнє квадратичне відхилення.

Ефективність процедур із різних математичних пакетів будемо порівнювати при розв'язанні двох задач оптимізації із цільовими функціями:

логарифма функції максимальної правдоподібності:

$$\ln L = \sum_{i=1}^s \ln \left( \frac{x_i}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx} \right) \Rightarrow \max, \quad (2)$$

спостереженого значення критерію Пірсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i^{експ} - n_i^{теор})^2}{n_i^{теор}} \Rightarrow \min, \quad (3)$$

де  $s$  – кількість частинних інтервалів;  $n_i^{експ}$ ,  $n_i^{теор}$  – абсолютні експериментальні та теоретичні частоти відповідно;  $x_0 = -\infty$ ;  $x_s = +\infty$ ; .

При розв'язанні задач (2) і (3) використовуємо початкові наближення із табл. 1 та обмеження:

$$\sigma_j \geq 0; w_j \geq 0, \sum_{j=1}^3 w_j = 1; j = \overline{1;3}. \quad (4)$$

Таблиця 1

Початкові наближення для параметрів суміші розподілів (1)

$j$	$a_j$	$\sigma_j$	$w_j$
1	2,9	0,7	0,40
2	3,6	0,5	0,45
3	4,0	1	0,15

Для розв'язання описаних задач оптимізації використовуємо:

- 1) метод спряжених градієнтів (МСГ), що входить до складу пакету Пошук розв'язків табличного процесора Excel;
- 2) функцію *NLPSolve*, яка входить до складу пакету *Optimization* математичного процесора Maple і реалізує низку методів, які орієнтовані на розв'язання задач нелінійної умовної оптимізації;
- 3) функцію *Search*, яка входить до складу пакету *Direct Search* і орієнтована на пошук локального екстремуму для задач нелінійної умовної оптимізації з заданими координатами початкової точки пошуку;
- 4) функцію *GlobalSearch*, яка входить до складу пакету *Direct Search* і орієнтована на пошук глобального екстремуму для задач нелінійної умовної оптимізації без призначення початкової точки пошуку.

Метод спряжених градієнтів будемо реалізовувати із параметрами: оцінки – квадратичні; різниці – центральні; усі інші налаштування – за замовчуванням.

**Висновки.** У тестових прикладах складність цільових функцій (2) та (3) перевищила можливості процедури *GlobalSearch* і умовний глобальний екстремум для них так і не був знайдений.

У задачах із цільовою функцією (2) процедури *NLPSolve* та *Search* приводили до одного і того ж розв'язку, який забезпечував більш точну апроксимацію емпіричного розподілу порівняно із розв'язком, який отриманий методом спряжених градієнтів у Excel.

У задачах із цільовою функцією (3) всі досліджувані процедури приводили до різних розв'язків. Розв'язок, який отриманий за

допомогою процедури *Search*, забезпечував найкращу точність апроксимації емпіричного розподілу (рис. 2).

Таблиця 2

## Оптимальні значення параметрів суміші розподілів (1)

Функція	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
Цільова функція – логарифм функції максимальної правдоподібності (2)									
МСГ (Excel)	2,631	3,801	3,962	0,950	0,317	1,010	0,46	0,54	0,00
Maple	2,260	3,468	4,000	0,976	0,423	0,155	0,296	0,438	0,266
Цільова функція – спостережене значення критерію Пірсона (3)									
МСГ (Excel)	2,903	3,797	3,958	0,749	0,250	0,978	0,41	0,59	0,00
<i>NLPSolve</i> (Maple)	2,329	2,900	3,781	0,763	0,266	0,223	0,14	0,71	0,15
<i>Search</i> (Maple)	2,984	3,693	4,069	0,778	0,169	0,062	0,46	0,40	0,14

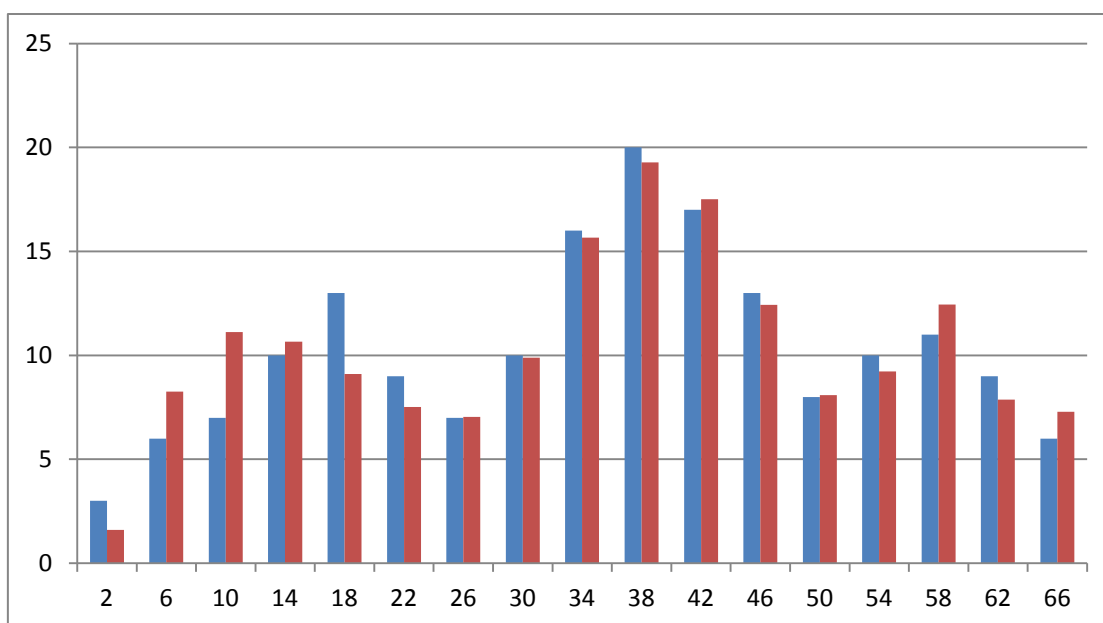


Рис. 2. Суміщена гістограма абсолютних емпіричних і теоретичних частот

### Література

1. Моисеев С.Н. Универсальный метод оптимизации без использования производных с квадратичной сходимостью [Электронный ресурс] / С.Н. Моисеев. – Воронеж, 2011. – 25 с. – Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/1534928/>.
2. Сиротин В.П. Декомпозиция распределений в моделировании социально-экономических процессов. Монография. / В.П. Сиротин, М.Ю. Архипова. – М.: изд-во МГУЭСИ, 2011. – 146 с.

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ  
ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОЦЕДУР ОПТИМИЗАЦИИ РАЗНЫХ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ НА ЗАДАЧАХ  
РАСЩЕПЛЕНИЯ СМЕСЕЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ**

Тулученко Г.Я., Старун Н.В., Маломуж Т.В.

*В работе сравниваются вычислительные возможности процедур оптимизации пакета Optimization математического процессора Maple, пакета Direct Search, совместимого с МП Maple, и пакета Поиск решений табличного процессора Excel при решении задач расщепления смесей нормальных и логарифмически нормальных вероятностных распределений. На тестовых примерах показаны преимущества процедур пакета Direct Search.*

*Ключевые слова: смесь вероятностных распределений, оптимизация, Maple, пакет Direct Search.*

**COMPARATIVE ANALYSIS OF THE COMPUTING  
OPPORTUNITIES OF THE OPTIMIZATION PROCEDURES FOR  
DIFFERENT MATHEMATICAL PROCESSORS ON THE  
PROBLEMS OF THE SPLITTING MIXTURES OF  
PROBABILISTIC DISTRIBUTIONS**

Tuluchenko H., Starun N., Malomuzh T.

*In this paper, we compare the computing opportunities of optimization procedures for the package Optimization of the Maple mathematical processor, the package Direct Search, which is compatible with the MP Maple, and package Search of Solutions from the table processor Excel for the problems solving of the splitting of mixtures from normal and log-normal probability distributions. The test cases show the advantages of the procedures for the Direct Search package.*

*Keywords: mixture of probability distributions, optimization, Maple, Direct Search package.*