УДК 514.18

ВІДНЕСЕННЯ ПОВЕРХОНЬ ДО ІЗОМЕТРИЧНИХ КООРДИНАТ ШЛЯХОМ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІНВЕРСІЄЮ ЦИЛІНДРІВ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Кремець Т.С., к.т.н.,
Несвідоміна О.В., аспірант[1]
Національний університет біоресурсів і природокористування України (Україна, м. Київ)

В роботі розглянуто інверсію циліндрів загального виду, віднесених до ізометричних координат. Координатними лініями циліндрів є прямолінійні твірні і криві ортогонального перерізу. Щоб сітка була ізометричною, крива поперечного перерізу повинна бути задана параметричними рівняннями у функції довжини дуги. Після інверсії циліндр перетворюється у циклічну поверхню, теж віднесену до ізометричних координат.

Ключові слова: циліндрична поверхня, перетворення інверсією, ізометричні координати.

Постановка проблеми. При віднесенні поверхні до ізометричних координат крайні члени першої квадратичної форми стають рівними, середній дорівнює нулю, а нескінченно малий елемент сітки перетворюється у квадрат. Такий координатний запис поверхні зручний для практичного використання, зокрема, для конформного відображення геометричних елементів на поверхню, а також нанесення на неї плоских рисунків [1, 2]. Тільки обмежений клас поверхонь можна віднести до ізометричних координат. Це мінімальні поверхні, деякі поверхні обертання, циліндри, у яких крива поперечного перерізу може бути аналітично описана у функції довжини дуги. Відомо, що при інверсії поверхні ізометрична сітка ліній кривини перетворюється в аналогічну сітку на новій поверхні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перехід від прямокутних координат на поверхнях обертання до ізометричних здійснюється за певним алгоритмом, розглянутим в праці [3]. Особливості перетворення конуса в цикліду Дюпена, віднесену до ізометричних координат, розглянуто в праці [4]. Особливе місце належить кулі, оскільки її можна відносити до різноманітних ізометричних сіток координатних ліній. Один із способів їх знаходження є побудова сферичного відображення мінімальних

---

[1] Науковий керівник – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

поверхонь [5].

Формулювання цілей статті. Розробити спосіб конструювання циклічних поверхонь, віднесених до ізометричних координат, шляхом перетворення інверсією циліндрів загального виду.

Основна частина. Оскільки однією сім'єю координатних ліній циліндра є множина прямолінійних твірних, то при інверсії всі вони перетворюються в кола. Таким чином, сім'я прямолінійних твірних циліндричної поверхні після інверсії перетворюється в сім'ю кіл, тобто перетворена поверхня є циклічною. Нехай крива ортогонального перерізу циліндра задана параметричними рівняннями у функції довільного параметра t:

$$x = x(t);\ y = y(t)\,. \tag{1}$$

Параметричні рівняння циліндричної поверхні із прямолінійними твірними, паралельними осі Oz, запишуться:

$$X = x(t) + x_0; \qquad Y = y(t) + y_0; \qquad Z = u + z_0, \tag{2}$$

де u – друга змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної;

$x_o,\ y_o,\ z_o$ – координатні відрізки зміщення поверхні відносно початку координат. Оскільки полюс інверсії знаходиться в початку координат, то по суті вони задають зміщення поверхні відносно полюса інверсії.

Інверсію поверхні (2) здійснимо за допомогою сфери одиничного радіуса при допомозі наступних формул [4]:

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{x + x_0}{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2}; \\ Y_i &= \frac{y + y_0}{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2}; \\ Z_i &= \frac{u + z_0}{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Знайдемо першу квадратичну форму поверхні (3). Для цього візьмемо частинні похідні. Частинні похідні по змінній t будуть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial t} &= \frac{x'\left[(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2\right] - 2(x+x_0)\left[x'(x+x_0) + y'(y+y_0)\right]}{\left[(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2\right]^2}; \\ \frac{\partial Y_i}{\partial t} &= \frac{y'\left[(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2\right] - 2(y+y_0)\left[x'(x+x_0) + y'(y+y_0)\right]}{\left[(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2\right]^2}; \\ \frac{\partial Z_i}{\partial t} &= -\frac{2(u+z_0)\left[x'(x+x_0) + y'(y+y_0)\right]}{\left[(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (u+z_0)^2\right]^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Запишемо частинні похідні по змінній u:

$$\frac{\partial X_i}{\partial u}=-\frac{2(u+z_0)(x+x_0)}{\left[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(u+z_0)^2\right]^2};$$
$$\frac{\partial Y_i}{\partial u}=-\frac{2(u+z_0)(y+y_0)}{\left[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(u+z_0)^2\right]^2}; \tag{5}$$
$$\frac{\partial Z_i}{\partial u}=-\frac{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(u+z_0)^2}{\left[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(u+z_0)^2\right]^2}.$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми будуть:

$$G=\left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial Y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial Z_i}{\partial t}\right)^2=\frac{x'^2+y'^2}{\left[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(u+z_0)^2\right]^2};$$
$$F=\frac{\partial X_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial X_i}{\partial u}+\frac{\partial Y_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial u}+\frac{\partial Z_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial Z_i}{\partial u}=0; \tag{6}$$
$$E=\left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y_i}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Z_i}{\partial u}\right)^2=\frac{1}{\left[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(u+z_0)^2\right]^2}.$$

Середній коефіцієнт рівний нулю, отже координатна сітка ортогональна. Крайні коефіцієнти (6) відрізняються тільки чисельником. Якщо взяти за криву поперечного перерізу циліндра лінію у функції власної дуги s $(x=x(s),\ y=y(s))$, то буде виконана умова $x'^2+y'^2=1$ і крайні коефіцієнти стануть рівними. Це означає, що координатна сітка утвореної поверхні буде ізометрична. Таким чином, можна сформулювати наступне твердження.

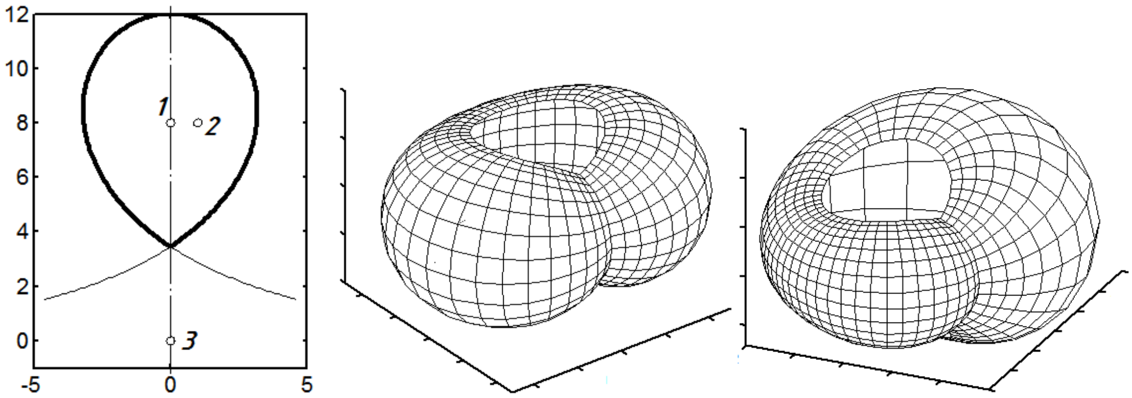
Твердження. Якщо задано циліндр параметричними рівняннями $X=x(s)+x_o$, $Y=y(s)+y_o$, $Z=u+z_o$, де $x=x(s)$, $y=y(s)$ – параметричні рівняння кривої ортогонального перерізу циліндра у функції власної дуги s, u – друга змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної, x_o, y_o, z_o – координатні відрізки зміщення поверхні відносно початку координат, то при його інверсії за формулами (3) отримаємо циклічну поверхню, яка буде віднесена до ізометричної сітки координатних ліній.

Розглянемо приклади. За лінію поперечного перерізу циліндра візьмемо криву із точкою самоперетину, яка задана наступними параметричними рівняннями:

$$x=s-a\tanh\left(\frac{2s}{a}\right);\qquad y=a\,\mathrm{sech}\left(\frac{2s}{a}\right), \tag{7}$$

де a – стала величина.

Крива при $a=12$ побудована на рис. 1,а, причому її ділянка до точки самоперетину зображена потовщеною лінією, що відповідає зміні дуги s в межах $s=-11{,}5\ldots11{,}5$.



а б в

Рис. 1. До інверсії циліндра, заданого кривою (7) поперечного перерізу:

а) виділена ділянка кривої, що відповідає циліндру із замкненою бічною поверхнею;

б) поверхня, побудована за формулами (3) при $x_o=0,\ y_o=-8,\ z_o=0;$

в) поверхня, побудована за формулами (3) при $x_o=-1,\ y_o=-8,\ z_o=0$

На рис. 1,а для наочності колами показані полюси інверсії. Цифрою 1 позначено полюс, який умовно знаходиться в центрі перерізу циліндра. Перетворений циліндр показаний на рис. 1,б. При зміщенні центра в сторону (позначено цифрою 2) порушується симетрія поверхні (рис.1,в). Лінія самоперетину циліндра, яка є прямою, після інверсії перетворюється в коло – теж лінію самоперетину отриманої поверхні. Якщо полюс інверсії взяти за межами замкненої області (позначено цифрою 3), то отримаємо поверхню, показану на рис. 2.

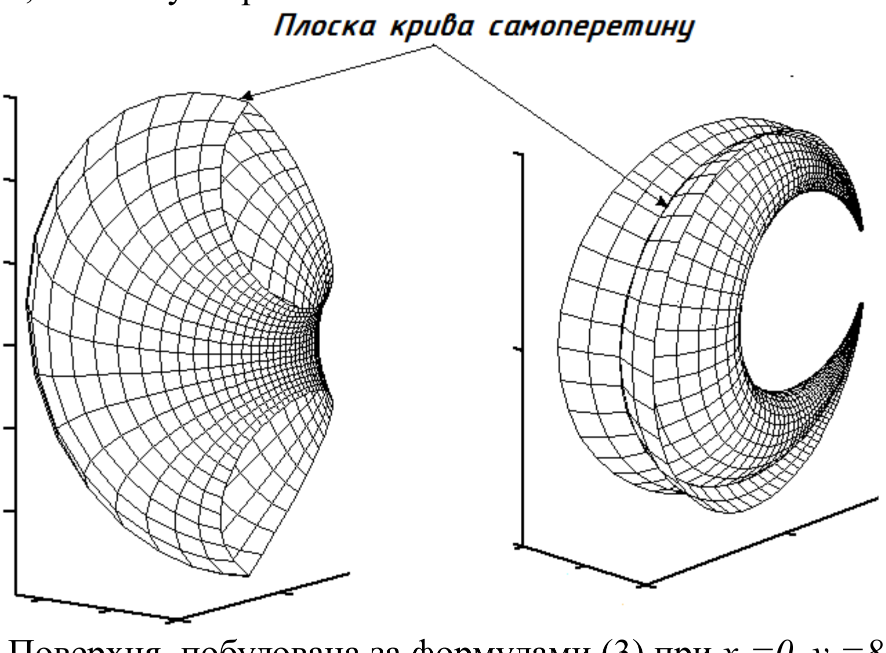


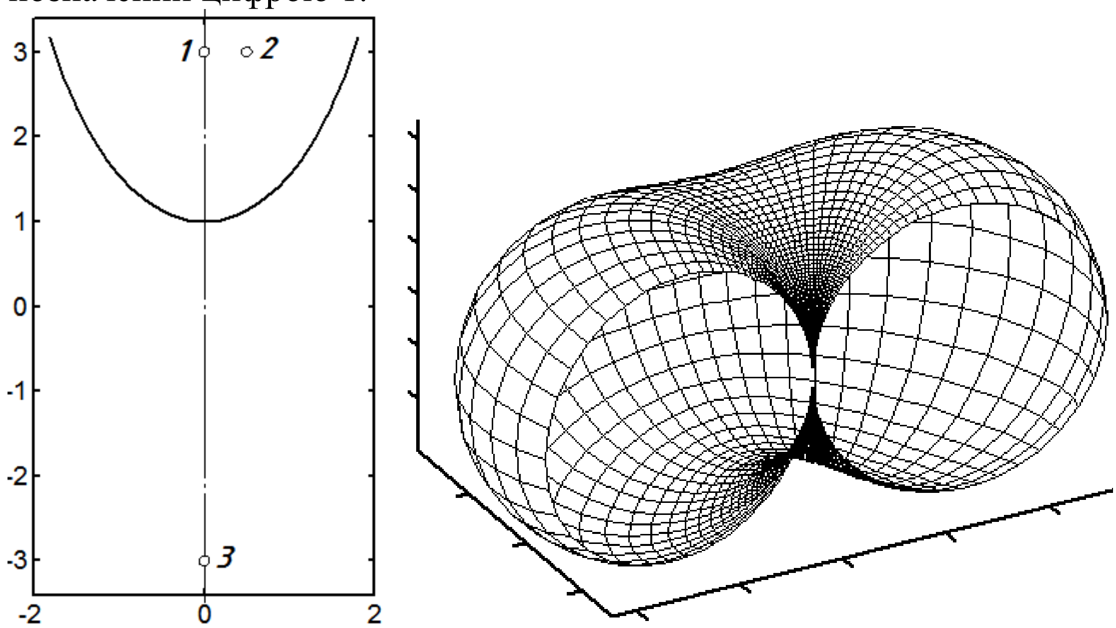
Рис. 2. Поверхня, побудована за формулами (3) при $x_o=0,\ y_o=8,\ z_o=0$

На рис. 2 праворуч зображена поверхня при збільшених межах існування змінних в порівнянні із рисунком ліворуч. На ньому показано частину поверхні після лінії самоперетину. Слід зазначити, що зміщення z_o циліндра вздовж осі Oz не впливає на форму поверхні при його перетворенні.

Візьмемо за криву поперечного перерізу ланцюгову лінію:

$$x = a \operatorname{arcsin} h(s/a); \qquad y = \sqrt{a^2 + s^2}. \tag{8}$$

На рис. 3 зображено криву – поперечний переріз циліндра, та розміщення полюса інверсії. Якщо полюс знаходиться на осі симетрії кривої, то перетворена поверхня теж є симетричною, наприклад, поверхня, зображена на рис. 3,а, яка відповідає полюсу симетрії, що позначений цифрою 1.



а б

Рис. 3. До інверсії циліндра, заданого кривою (8) поперечного перерізу:

а) ділянка кривої із позначеними полюсами інверсії;

б) отримана поверхня, що відповідає полюсу інверсії, позначеного цифрою 1

При зміщенні полюса інверсії від осі симетрії отримана поверхня уже не буде симетричною. На рис. 4 в проекціях побудована поверхня, що відповідає полюсу інверсії, позначеному цифрою 2 на рис. 3,а. Якщо ж за полюс інверсії взяти точку 3 (рис. 3,а), то поверхня стає подібною до поверхні, зображеній на рис. 2. Прямолінійні твірні циліндра, які прямують у нескінченність, при його інверсії перетворюються у кола, які як завгодно близько наближуються до полюса інверсії – точки 0 (рис. 5).

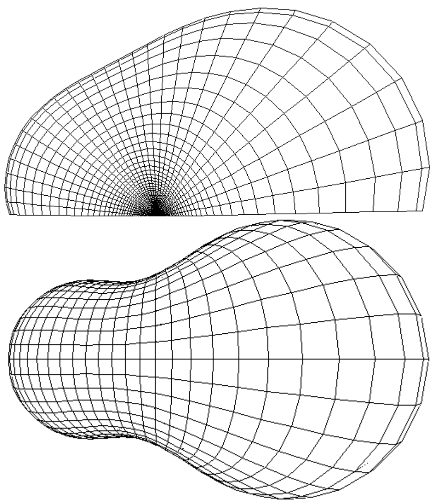


Рис. 4. Поверхня, отримана інверсією циліндра при розташуванні полюса інверсії в точці 2 (рис. 3,а)

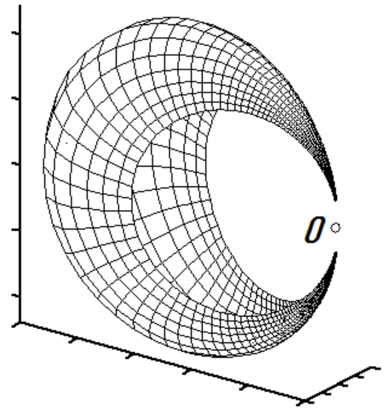


Рис. 5. Поверхня, отримана інверсією циліндра при розташуванні полюса інверсії в точці 3 (рис. 3,а)

В залежності від розташування полюса інверсії форма поверхні може змінюватися, однак незмінним залишається те, що прямолінійні твірні циліндра перетворюються у кола і всі ці кола нескінченно близько наближаються до точки 0 – полюса інверсії. Це видно також на рисунках 3,б і 4. Якщо полюс інверсії взяти на кривій – лінії ортогонального перерізу циліндра, то поверхню побудувати не можна.

Висновки. Інверсія всякої циліндричної поверхні, у якої крива ортогонального перерізу описана у функції довжини власної дуги, дає циклічну поверхню, віднесену до ізометричних координат. При інверсії прямолінійні твірні циліндра перетворюються в кола циклічної поверхні і всі вони нескінченно близько наближаються до спільної точки – полюса інверсії. Така поверхня є частковим випадком поверхонь Іаохімсталя.

Література

1. Кремець Т.С. Автоматизація переходу від прямокутних до ізометричних сіток на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Т.С. Кремець, О.В. Несвідоміна // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: МДПУ, 2016. – Вип. 5. - С. 88 – 92.
2. Несвидомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец // MOTROL. Commission of motorization and energetics in agriculture. –Vol 16. Lublin-Preszow. – № 3. – 2014. – С.58 – 65.
3. Кремець Т.С. Конструювання поверхонь обертання, віднесених до

ізометричних сіток координатних ліній / Т.С. Кремець, В.М. Несвідомін // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С.271 – 276.
4. Пилипака С.Ф. Перетворення конуса в цикліду Дюпена із збереженням ізометричних координат / С.Ф. Пилипака, І.Ю. Грищенко, О.В. Несвідоміна // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: МДПУ, 2017. – Вип. 9. – С. 109–113.
5. Несвідоміна О.В. Віднесення кулі до ізометричних координат на основі сферичного відображення мінімальних поверхонь Т.С. Кремець, І.Ю. Грищенко, О.В. Несвідоміна // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: МДПУ, 2016. – Вип. 7. - С. 74 – 80.

ОТНЕСЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ К ИЗОМЕТРИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ ПУТЕМ ПРЕВРАЩЕНИЯ ИНВЕРСИЕЙ ЦИЛИНДРОВ ОБЩЕГО ВИДА

Пилипака С.Ф., Кремец Т.С., Несвидомина О.В.

В работе рассмотрено инверсию цилиндров общего вида, отнесенных к изометрическим координатам. Координатными линиями цилиндров являються прямолинейные образующие и кривые ортогонального сечения. Чтобы сеть была изометрической, кривая поперечного сечения должна бать задана параметрическими уравнениями у функции длины дуги. После инверсии цилiндр превращается у циклическую поверхность, отнесенную к изометрическим координатам.

Ключевые слова: циклическая поверхность, превращение инверсией, изометрические координаты.

DESCRIPTION OF SURFACES IN ISOMETRIC COORDINATES BY INVERSION OF CYLINDERS OF GENERAL KIND

Pylypaka S., Kremetz T., Nesvidomina O.

The inversion of cylinders of general type, referred to isometric coordinates, is considered in this paper. The coordinate lines of the cylinders are rectilinear lines and curves of the orthogonal section. In order for the net to be isometric, the curve of the cross section must be given by parametric equations for the arc length function. After the inversion of the cylinder, the cyclic surface, referred to isometric coordinates, transforms.

Keywords: cyclic surface, inversion transformation, isometric coordinates.