УДК 621.372.061

АЛГОРИТМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА МАТРИЦ В МЕТОДЕ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Залевская О.В., к.т.н.,
Литвиненко П.Л.,
Финогенов А.Д., к.т.н.,
Янушевська О.І.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)

В работе предложен алгоритм полного перебора обратно-симметричных матриц с учетом подобия относительно главной побочной диагонали.

Ключевые слова: метод анализа иерархий (МАИ), парные сравнения, многокритериальное принятие решений, алгоритм полного перебора.

Постановка проблемы. Индекс случайной согласованности (СИ) в методе анализа иерархий (МАИ) [1] используется для вычисления оценки согласованности (ОС) мнения эксперта, собственного вектора, соответствующего максимальному собственному числу и т.д. Расчет СИ для матриц малой размерности основан на вычислении математического ожидания значения λ_{max} для обратно-симметричных матриц, заполненных значениями в выбранной шкале, из которых чаще всего используется (1):

$$\Omega_9 = \{1/9,1/8,1/7,1/6,1/5,1/4,1/3,1/2,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}. \tag{1}$$

При расчете всех возможных вариантов матриц [1] для проведения различных экспериментов, связанных со значениями λ_{max}, основной проблемой является время расчета [2].

Анализ последних исследований и публикаций. При разработке МАИ Т. Саати определил значения СИ на основании выборки из 50 матриц для каждой из размерностей [1]. В дальнейшем эти данные были уточнены как в его работах [3], так и в работах ряда других исследователей [2-6]. В [2] предлагался подход основанный на расчете всех возможных вариантов матриц и были приведены значения СИ для матриц N=3 и N=4, которые несколько отличались от значений, полученных другими авторами. Уменьшение времени вычисления λ_{max}, позволит повысить эффективность анализа не только этапа оценки согласованности мнения эксперта, но и других этапов МАИ.

Формулировка целей статьи. В статье предлагается алгоритм формирования полного набора матриц определенной размерности с заполнением данными из выбранной шкалы парных сравнений и учетом подобия матриц с симметрией относительно главной побочной диагонали.

Основная часть. Обратно-симметричная матрица парных сравнений однозначно определяется элементами над (или под) главной диагональю. Количество таких элементов для матрицы размерности N составляет $S=\frac{1}{2}(N^2-N)$.

Количество необходимых расчетов можно сократить, если использовать свойство «симметрии» блоков (рис. 1). Отметим, что подобие матриц осуществляется только в случае симметрии всего блока, а не отдельных элементов в блоках [7].

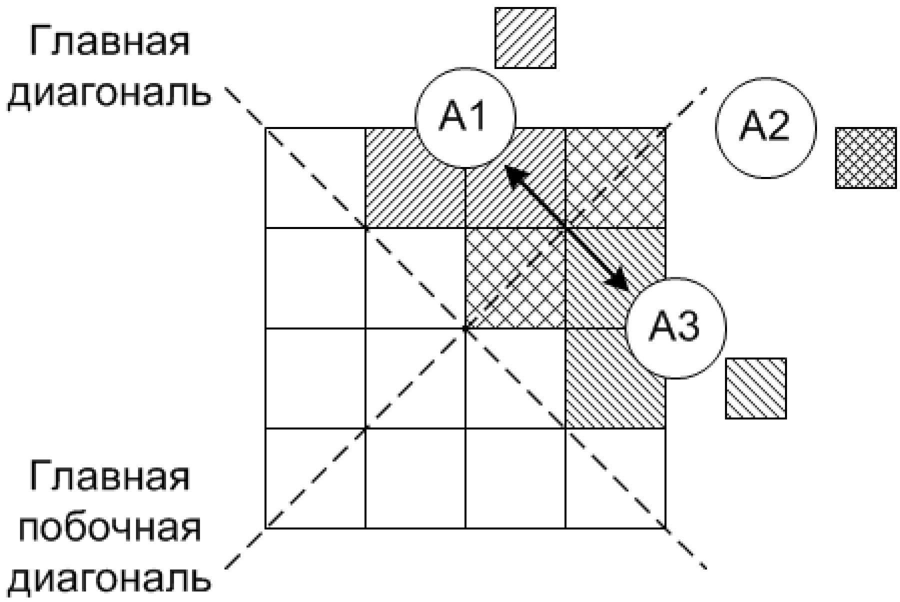

Рис.1. Схема симметрии блоков

Общее количество возможных вариантов матриц при использовании шкалы (1), содержащей C = 17 различных элементов, представлено в таблице 1, где S – количество определяющих элементов матрицы (количество элементов над главной диагональю), K – количество возможных матриц, K^* – количество матриц с учетом симметрии, B – выигрыш от использования симметрии в %.

Таблица 1

Количество матриц для шкалы Ω (1)

N	S	K	K*	B	N	S	K	K	B
3	3	4913	2601	47.05	7	21	6.9E+25	3.5E+25	50
4	6	2.4E+7	1.2E+7	49.83	8	28	2.8E+34	1.4E+34	50
5	10	2.0E+12	1.0E+12	50	9	36	2.0E+44	9.9E+43	50
6	15	2.9E+18	1.4E+18	50	10	45	2.3E+55	1.2E+55	50

Подобие обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали позволяет уменьшить количество необходимых вычислений на 47-50%.

Задача полного перебора требует генерации всех возможных матриц парных сравнений. Очевидно, что хранение всех сгенерированных матриц в оперативной памяти, особенно для матриц большой размерности, нерационально. Хранение данных на жестком диске так же не является альтернативой, так как существенно возрастет время доступа к данным (скорость чтения/записи).

Наиболее эффективным представляется подход, который позволит на основе числового индекса определить все элементы матрицы: то есть необходимо определить совокупность правил и знаков, с помощью которых можно отобразить (кодировать) любое неотрицательное число.

Данная формулировка очень похожа на определение позиционной системы исчисления. В таблице 2 приведен сокращенный список матриц для N=3 (S=3) и $\Omega_2 = \{1/2,1,2\}$.

Таблица 2

Соответствие матриц системе исчисления

№	Значения элементов над главной диагональю	Представление в форме позиционной системы исчисления с основанием 3
1	1/2, 1/2, 1/2	0 0 0
2	1/2, 1/2, 1	0 0 1
3	1/2, 1/2, 2	0 0 2
4	1/2, 1, 1/2	0 1 0
...	...	...
26	2 2 1	2 2 1
27	2 2 2	2 2 2

Легко заметить, что представление каждой следующей матрицы в форме позиционной системы исчисления – это результат сложения единицы к предыдущему результату. При этом, в силу симметрии блоков A1 и A3 (рис. 1), у матриц 001 и 100 значения λ_{max} будут одинаковы, т.е. достаточно вычислить значение λ_{max} для одной из них и удвоить его.

Чтобы избежать ненужной генерации матриц с симметрией блоков A1, A3 в форме позиционной системы исчисления вычисления организованы следующим образом (рис. 2).

Каждый из блоков A1, A2, A3 – является набором элементов матрицы, а операции сравнения и инкремента организованы по принципу позиционной системы исчисления. Значение A_END -

эквивалентно максимальному значению для данной системы исчисления и является критерием останова расчета.

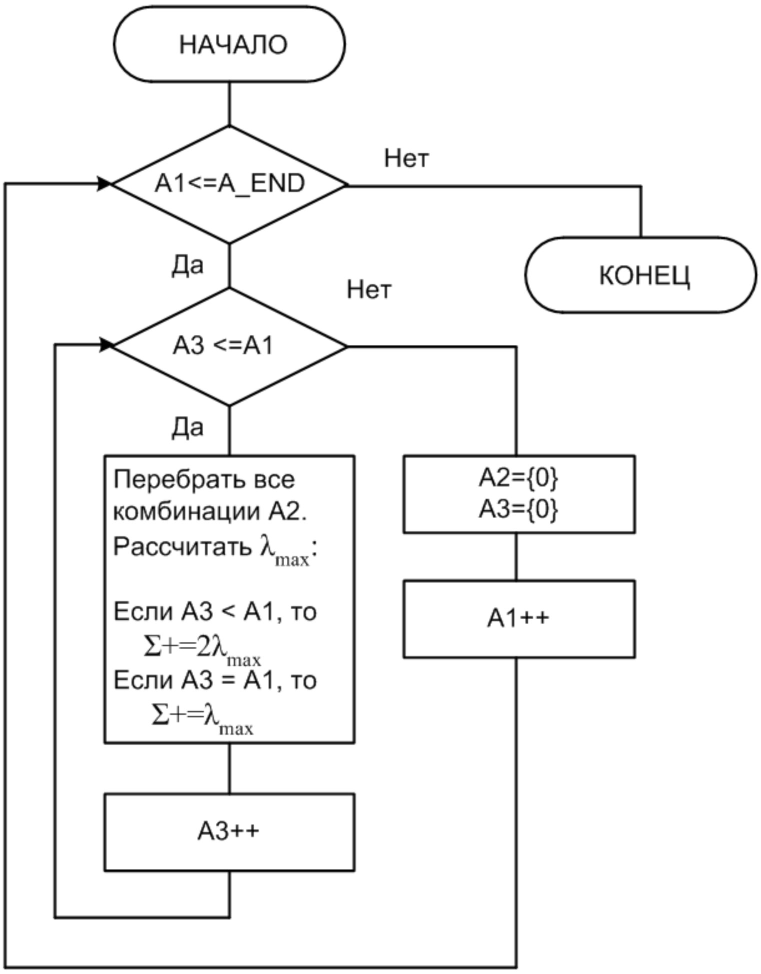

Рис. 2. Блок-схема алгоритма

Выводы. Предложенный алгоритм реализации перебора матриц учитывает как обратную симметрию элементов, так и подобие относительно главной побочной диагонали [7] и позволяет уменьшить количество необходимых вычислений на 47-50%.

Литература

1. Saaty T. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation / T.L. Saaty. – New York : McGraw-Hill, 1980. – ISBN 0-07-054371-2. – 287 p.
2. Попович Е.С. Особенности определения индекса случайной согласованности в метода анализа иерархий (МАИ) / Е.С. Попович, А.Д.Финогенов, П.Л. Литвиненко // «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності» : 3-а міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених, 22-23 квітня 2014, Київ : матеріали. – К., 2014. – С. 205–210.

3. Saaty T. Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios / T.L.Saaty, G. Vargas Luis // Mathematical Modelling. – 1984. – Vol. 5. – P. 309–324.
4. Панкратова Н.Д. Моделі і методи аналізу ієрархій. Теорія. Застосування : навч. посібник / Н.Д. Панкратова, Н.І.Недашковська. – К. : ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2010. – 372 с.
5. Tummala V.M.R. A note on the computation of the mean random inconsistency index of the analytic hierarchy process (AHP) / V.M.R. Tummala // Theory and Decision. – 1998. – № 44. – P. 221–230.
6. Alonso J.A. Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach / Jose Antonio Alonso, Ma Teresa Lamata // International Journal of Uncertainty: Fuzziness and Knowledge-Based Systems. – 2006. – Vol. 14. – № 4. – P. 445-459.
7. Муха И.П. Подобие обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали / И.П. Муха, П.Л. Литвиненко, А.Д. Финогенов // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – 2016. – Вип. 6. – С. 86-90. – ISBN 978-617-7346-42-4.

АЛГОРИТМ ПОВНОГО ПЕРЕБОРУ МАТРИЦЬ В МЕТОДІ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

Залевська О.В., Литвиненко П.Л., Фіногенов О.Д., Янушевська О.І.

В роботі запропоновано алгоритм повного перебору обернено-симетричних матриць з урахуванням подібності відносно головної побічної діагоналі.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій (МАІ), парні порівняння, багатокритеріальне прийняття рішень, алгоритм повного перебору.

THE EXHAUSTIVE SEARCH MATRIX ALGORITHM IN THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

Zalevska O., Litvinenko P., Finogenov A., Yanushevska O.

The paper proposes an exhaustive search algorithm for the inverse-symmetric matrices, taking into account the similarity with the main secondary diagonal.

Key words: AHP, pairwise comparison, multicriteria decision making, exhaustive search algorithm.