

УДК 514.18

**ДИСКРЕТНА ДВОВИМІРНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ
СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ТОЧКОВИХ МНОЖИН
ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦІЙ**

Воронцов О.В., к.т.н.,

Тулупова Л.О., к.ф.-м.н.

Полтавський національний технічний університет імені Юрія

Кондратюка (Україна),

Воронцова І.В., к.пед.н.

Полтавський коледж нафти і газу

Полтавського національного технічного університету імені Юрія

Кондратюка (Україна)

Сучасний стан дослідження геометричних образів (ГО) та проектування криволінійних об'єктів у галузях техніки, архітектури, будівництва та машинобудування потребує врахування якомога більшої кількості вихідних даних та вимог для забезпечення відповідної точності моделі. При геометричному моделюванні вихідними даними, як правило, виступають геометричні характеристики та умови, які найчастіше представлені у числовій формі (координати або значення параметрів) і масиви яких можуть бути досить великими. У цих умовах методи глобального неперервного моделювання, коли відшукується єдиний розв'язок, виявляються неефективними, тому що зазвичай вимагають використання достатньо складних математичних алгоритмів та не можуть забезпечити необхідну адекватність моделей. Зазначених недоліків позбавлені методи дискретного геометричного моделювання. У статті пропонується застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з класичним методом скінченних різниць, що дозволяє істотно підвищити ефективність та розширити можливості процесу дискретного моделювання ГО. Зокрема дослідити можливість використання у якості інтерполянтів не тільки параболічних, а й трансцендентних функціональних залежностей. На основі геометричного апарату суперпозицій одержані обчислювальні шаблони для суцільної двовимірної дискретної інтерполяції, що дозволяють моделювати ГО у вигляді дискретних каркасів трансцендентних функцій та тим самим розширюють можливості дискретного геометричного моделювання. Звичайні способи інтерполяції не дозволяють застосовувати трансцендентні функції як інтерполянти тому, що при підстановці в них значень вихідних умов отримуємо систему

трансцендентних рівнянь, яку не вдається розв'язати у загальному випадку. Розроблений спосіб дозволяє формувати ГО у вигляді каркасів трансцендентних кривих, які проходять через задані точки, що у більшості випадків є неможливим при застосуванні звичайних методів інтерполяції. Результати даної роботи можуть бути основою подальших досліджень дискретного формування ГО двовимірними числовими послідовностями інших елементарних функціональних залежностей.

Ключові слова: дискретне моделювання, геометричні образи, метод скінчених різниць, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, трансцендентні функції.

Постановка проблеми. Замінюючи аргумент x на дискретний параметр i у синусоїдальній функції, матимемо:

$$y_i = a + b \cdot \sin(ci + d). \quad (1)$$

Числова послідовність (1) є дискретною функцією довільної величини, що описує гармонійні коливання [1].

За сучасним світоглядом всі звукові, теплові, світлові, електричні та магнітні явища, тобто найважливіші фізичні процеси оточуючого світу зводяться до різних форм коливання матерії. Мова, засоби спілкування людей, музика здатні викликати у людей складні емоції, які фізично визначаються так само, як і інші звукові явища, коливанням струн, повітря, пластинок та інших пружних тіл; коливання відіграють важливу роль в таких галузях техніки, як електрика та радіо — вироблення, передача та споживання електричної енергії, телефонія, радіо, телебачення, радіолокація — всі ці важливі галузі засновані на використанні електричних і електромагнітних коливань. З коливаннями ми зустрічаємось і в живому організмі — биття серця, скорочення шлунку, діяльність кишківника мають коливальний характер.

Вищенаведене обумовлює актуальність дослідження моделювання названих процесів.

Звичайні способи інтерполяції не дозволяють застосовувати трансцендентні функції як інтерполянти, оскільки потребують розв'язання систем трансцендентних рівнянь, які не вдається розв'язати у загальному випадку. Застосування геометричного апарату суперпозицій дозволяє розв'язувати задачі суцільної двовимірної інтерполяції дискретно представлених ГО, складовими каркасу яких будуть дискретні аналоги трансцендентних функцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [2-9] автора даної статті досліджено аспекти використання для дискретного геометричного моделювання, поряд з параболічними функціями, інших елементарних функціональних залежностей. Одержано

обчислювальні шаблони для формування одновимірних ГО дискретними аналогами показникових, гіперболічних та синусоїдальних функцій, а також для суцільної дискретної інтерполяції двовимірними числовими послідовностями, складовими яких є гіперболічні функції.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є розроблення способу, що дозволяє формувати ГО у вигляді каркасів трансцендентних кривих, які проходять через задані точки та одержання обчислювального шаблону для суцільної двовимірної дискретної інтерполяції з метою моделювання ГО у вигляді дискретних каркасів синусоїдальних залежностей.

Виклад основного матеріалу. У роботі [2] було одержано обчислювальний шаблон для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів шляхом інтерполяції заданих вузлових точок синусоїдальними функціями у вигляді:

$$1 = 0,4806295219952881 \quad 1 \quad -0,4806295219952881$$

Розглянемо числову послідовність двох змінних (2), що зображена на рисунку 1.

$$z_{i,j} = \sin i + \sin j \quad (2)$$

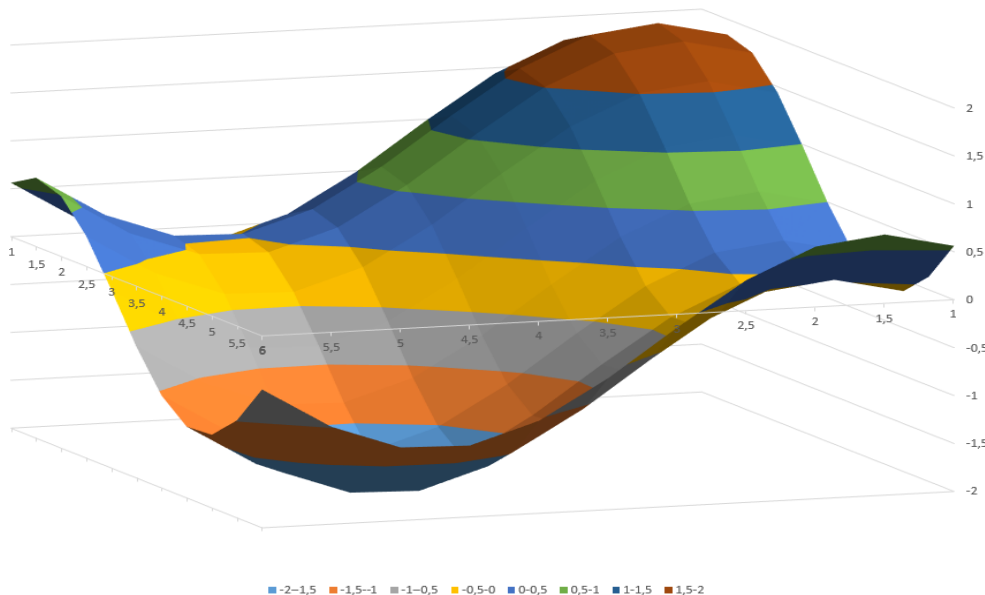


Рис. 1. Двовимірна числова послідовність $z_{i,j} = \sin i + \sin j$

Складовими послідовності (2) є дві послідовності однієї змінної (3) та (4):

$$z_i = \sin i, \quad (3)$$

$$z_j = \sin j, \quad (4)$$

що, на підставі визначених у роботі [4] формул, можуть бути представлені рекурентними залежностями на основі суперпозицій у вигляді

$$z_i = k_1 z_{i-1} + k_2 z_{i+1} + k_3 z_{i+2}, \quad (5)$$

$$z_j = k_4 z_{j-1} + k_5 z_{j+1} + k_6 z_{j+2}, \quad (6)$$

де, враховуючи результати досліджень роботи [2], отримаємо:

$$\begin{aligned} k_1 = k_4 &= -4,806295219952881 \cdot 10^{-1}; \quad k_2 = k_5 = 1; \\ k_3 = k_6 &= (1 - k_1 - k_2) = (1 - k_4 - k_5) = \\ &= 4,806295219952881 \cdot 10^{-1}. \end{aligned}$$

Додаванням (5) до (6) одержимо рекурентну формулу послідовності (2) у вигляді:

$$z_{i,j} = k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i+2,j} + k_1 z_{i,j-1} + k_2 z_{i,j+1} + k_3 z_{i,j+2}, \quad (7)$$

де $k_1 = -0,240314761$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,240314761$,

або, у вигляді обчислювального шаблону (рис. 2) для суцільної дискретної інтерполяції двовимірними числовими послідовностями, складовими яких є синусоїдальні функції виду (3) та (4).

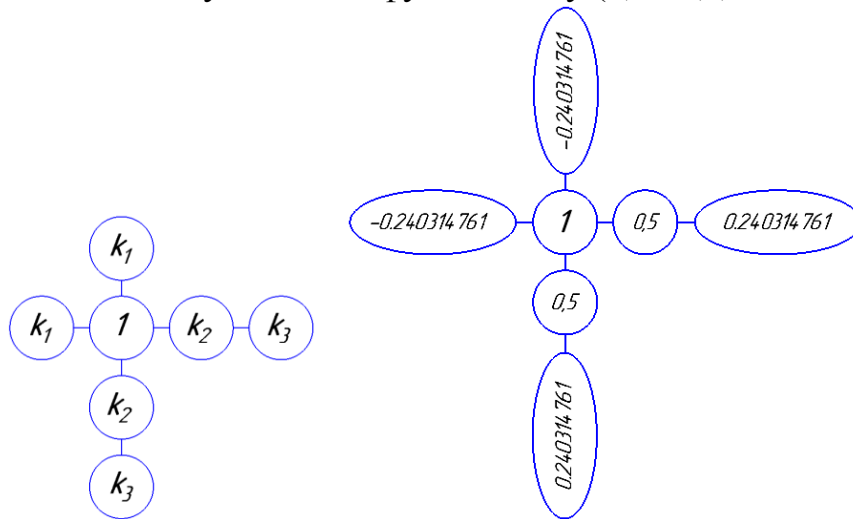


Рис. 2. Обчислювальний шаблон для дискретної інтерполяції числовою послідовністю двох змінних $z_{i,j} = \sin i + \sin j$

Приклад 1. Побудуємо дискретну модель кривої поверхні на заданих в плані сітці, опорному контурі та аплікаті центрального вузла (рис. 3) за наступними вихідними даними, що належать поверхні (2):

$$z_{i+2,j} = z_{i,j+2} = z_{20} = z_{02} = 0,909297427;$$

$$z_{i+2,j+1} = z_{i+1,j+2} = z_{21} = z_{12} = 1,750768412;$$

$$z_{i,j} = z_{00} = 0.$$

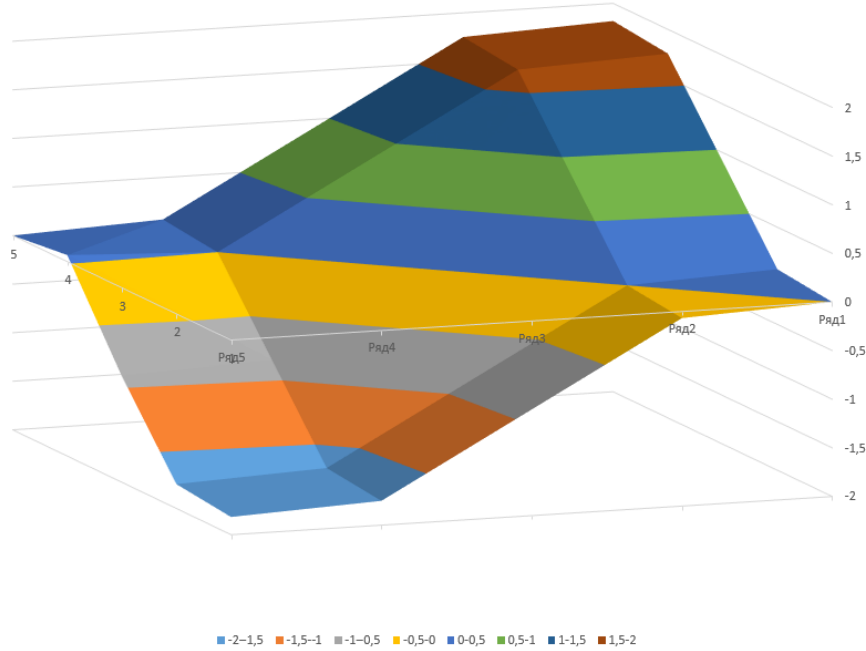


Рис. 3. Дискретний каркас поверхні $z_{i,j} = \sin i + \sin j$

Оскільки опорний контур є симетричним відносно площин xOz, yOz та діагональної площини, то

$$\begin{aligned} z_{21} &= z_{12} = -z_{-2-1} = -z_{-1-2}; & z_{-12} &= z_{2-1} = -z_{-21} = -z_{1-2}; \\ z_{10} &= z_{01} = -z_{-10} = -z_{0-1}; & z_{11} &= -z_{-1-1}; \\ z_{20} &= z_{02} = -z_{-20} = -z_{0-2}. \end{aligned}$$

Складаємо систему рівнянь для $1/8$ частини, а саме для визначення аплікату лише двох вузлів: $z_{i+1,j} = z_{10}$ та $z_{i+1,j+1} = z_{11}$.

$$\begin{cases} k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i,j} + k_3 z_{i+2,j} + k_1 z_{i+1,j+2} + \\ \quad + k_2 z_{i+1,j+1} + k_3 z_{i+1,j-1} = z_{i+1,j}; \\ k_1 z_{i-1,j+1} + k_2 z_{i,j+1} + k_3 z_{i+2,j+1} + k_1 z_{i+1,j-1} + \\ \quad + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i+1,j+2} = z_{i+1,j+1}. \end{cases} \Rightarrow \quad (8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 z_{-10} + k_2 z_{00} + k_3 z_{20} + k_1 z_{12} + k_2 z_{11} + k_3 z_{1-1} = z_{10}; \\ k_1 z_{-11} + k_2 z_{01} + k_3 z_{21} + k_1 z_{1-1} + k_2 z_{10} + k_3 z_{12} = z_{11}. \end{cases}$$

Замінюючи в системі рівнянь (8) аплікати симетричних вузлів та підставляючи значення аплікату заданих вузлів, отримаємо два рівняння з двома невідомими:

$$\begin{cases} 0,240314761 \cdot z_{10} + 0,5 \cdot 0 + 0,240314761 \cdot \\ \cdot 0,909297427 - 0,240314761 \cdot 1,750768412 + \\ \quad + 0,5 \cdot z_{11} + 0,240314761 \cdot 0 = z_{10}; \\ -0,240314761 \cdot 0 + 0,5 \cdot z_{10} + 0,240314761 \cdot \\ \cdot 1,750768412 - 0,240314761 \cdot 0 + 0,5 \cdot z_{10} + \\ \quad + 0,240314761 \cdot 1,750768412 = z_{11}. \end{cases} \quad (9)$$

Результати розв'язку системи (9) наведені в таблиці 1 і повністю співпадають зі значеннями аплікату, що розраховані за формулою (2).

Таблиця 1.

Значення аплікат точок відсіку дискретного каркасу поверхні

$$z_{i,j} = \sin i + \sin j$$

j/i	-2	-1	0	1	2	
2	0	0,067826439	0,909297427	1,750768412	1,818594854	2
1	-0,067826439	0	0,841470985	1,68294197	1,750768412	1
0	-0,909297427	-0,841470985	0	0,841470985	0,909297427	0
-1	-1,750768412	-1,68294197	-0,841470985	0	0,067826439	-1
-2	-1,818594854	-1,750768412	-0,909297427	-0,067826439	0	-2
	-2	-1	0	1	2	

Висновки. На основі геометричного апарату суперпозицій розроблено спосіб, що дозволяє формувати двовимірні ГО у вигляді каркасів трансцендентних кривих, які проходять через задані точки та одержано обчислювальний шаблон, що дозволяє виконувати суцільну двовимірну дискретну інтерполяцію двовимірними числовими послідовностями у вигляді дискретних каркасів синусоїдальних залежностей.

Результати даної роботи можуть бути основою подальших досліджень двовимірної інтерполяції ГО, складовими каркасу яких будуть дискретні аналоги інших елементарних функцій.

Література

1. Воронцов О.В., Тулупова Л.О. Рекурентні формули синусоїди у формуванні одновимірних геометричних образів. *Сучасні проблеми моделювання. Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького*. Мелітополь, 2015. Вип. 4. С.26–30.
2. Воронцов О.В. Дискретне моделювання геометричних образів суперпозиціями точкових множин трансцендентних функцій. *Сучасні проблеми моделювання. Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького*. Мелітополь, 2018. Вип. 13. С.30–36.
3. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Parabolic discrete interpolation by superpositions of one-dimensional point sets. *Journal of Engineering Education*, 2018. Vol. 107 (2). P.134–140.
4. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Discrete modeling of building structures geometric images. *International Journal of Engineering & Technology*, 2018. Vol. 7 (3.2). P.727-731.

ДИСКРЕТНАЯ ДВУМЕРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Воронцов О.В., Тулупова Л.А., Воронцова И.В.

На современном этапе исследование геометрических образов (ГО) и проектирование криволинейных объектов в областях техники, архитектуры и строительства, машиностроения требует учёта как можно большего количества исходных данных и требований для обеспечения соответствующей точности модели.

При геометрическом моделировании исходными данными, как правило, выступают геометрические характеристики и условия, чаще всего представленные в числовой форме (координаты или значения параметров), массивы которых могут быть достаточно большими. В этих условиях методы глобального непрерывного моделирования, когда отыскивается единственное решение, оказываются неэффективными, потому что обычно требуют использования достаточно сложных математических алгоритмов и не могут обеспечить необходимую адекватность моделей. Указанных недостатков лишены методы дискретного геометрического моделирования.

В статье предлагается применение в сочетании с классическим методом конечных разностей геометрического аппарата суперпозиций, что позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования ГО. В частности, исследовать возможность использования в качестве интерполянтов не только параболических, но и трансцендентных функциональных зависимостей.

На основе геометрического аппарата суперпозиций получены вычислительные шаблоны для сплошной двумерной дискретной интерполяции, позволяющие моделировать ГО в виде дискретных каркасов трансцендентных функций и которые, тем самым, расширяют возможности дискретного геометрического моделирования. Обычные способы интерполяции не позволяют применять трансцендентные функции как интерполянт потому, что при подстановке в них значений исходных условий получают систему трансцендентных уравнений, которую не удаётся решить в общем случае.

Разработанный способ позволяет формировать ГО в виде каркасов трансцендентных кривых, проходящих через заданные точки, что в большинстве случаев невозможно при использовании обычных методов интерполяции. Результаты данной работы могут быть основой дальнейших исследований дискретного формирования ГО двумерными числовыми последовательностями и других элементарных функциональных зависимостей.

Ключевые слова: дискретное моделирование, геометрические образы, метод конечных разностей, статико-геометрический метод,

геометрический аппарат суперпозиций, трансцендентные функции.

DISCRETE TWO-DIMENSIONAL INTERPOLATION BY SUPERPOSITIONS OF POINT SETS OF TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

Vorontsov O., Tulupova L., Vorontsova I.

At the present stage, an investigation of geometric images and a design of curvilinear objects in technics, architecture and construction, mechanical engineering demand a lot of source data and requirements to ensure appropriate accuracy of a model.

As a rule, in geometric modeling, initial data are geometric characteristics and conditions, which are mostly represented in numerical form (coordinates or parameter values). Arrays of these data can be quite large. Under these conditions, methods of global continuous modeling, when the only solution must be found, are inefficient. It happens because these methods usually require to using rather complicate mathematical algorithms and cannot provide a necessary adequacy of models.

Methods of discrete geometric modeling don't have these disadvantages. In the article it is proposed using a geometric apparatus of superpositions in combination with a classical finite-difference method. All this together allows significantly increasing efficiency and expanding capabilities of a discrete modeling process of geometric images.

In particular, it make possible to investigate a possibility of using not only parabolic, but also transcendental functional dependencies, as interpolants. Computing templates for continuous two-dimensional discrete interpolation are obtained on the basis of the geometric apparatus of superpositions. It allows modeling of geometric images in the form of discrete frames of transcendental functions and extends capabilities of discrete geometric modeling.

Traditional interpolation methods do not allow using transcendental functions as interpolants because, substituting into them the values of initial data, we get a system of transcendental equations, which cannot be solved in the general case. The developed method allows forming geometric images in the form of frames of transcendental curves, passing through given points. Such modeling is impossible in the most cases using traditional interpolation methods.

The results of this work can become a basis for further research of discrete formation of geometric images by two-dimensional numerical sequences and other elementary functional dependencies.

Keywords: discrete modeling, geometric images, method of finite differences, static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, transcendental functions.