

УДК 514.18

ТРАЄКТОРІЯ РУХУ ВАНТАЖУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ У СТАНІ ЇЇ РЕЗОНАНСУ 5:2

Куценко Л.М., д.т.н.

Національний університет цивільного захисту України

(м. Харків, Україна),

Запольський Л.Л., к.т.н.

Український науково-дослідний інститут цивільного захисту

(м. Київ, Україна)

Побудовано резонансну (типу 5:2) траєкторію руху вантажу хитної пружини. Хитною пружиною (swinging spring) називають різновид математичного маятника, який складається з точкового вантажу, приєднаного до невагомої пружини. Другий кінець пружини нерухомий. Розглядаються маятниковоподібні коливання пружини у вертикальній площині за умови збереження прямолінійності її осі. Розрахунки виконано на базі розв'язків системи диференціальних рівнянь, з компонентами, у які входять значення частот вертикальних і горизонтальних переміщень точки на пружині.

Доцільність розгляду теми визначається необхідністю дослідження технологічних процесів динамічних систем, коли нелінійно зв'язані коливальні компоненти системи обмінюються енергією між собою. За допомогою феномена хитної пружини ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. Особливе значення має дослідження стану резонансу хитної пружини - коли частота поздовжніх коливань відрізняються в кратну кількість разів від частоти поперечних коливань. Крім розповсюдженого випадку резонансу 2:1 є необхідність розв'язувати задачі з іншими значеннями відношення частот, у тому числі – з відношенням 5:2.

Одержані результати дозволяють за допомогою комп'ютера будувати траєкторію руху вантажу хитної пружини, яка відповідатиме заданому відношенню частот поздовжніх і поперечних коливань. Для цього, крім основних параметрів (маси вантажу, жорсткості пружини та її довжини в ненавантаженому стані), ще залучаються початкові значення параметрів ініціювання коливань. А саме, «стартові» координати положення вантажу, та початкові швидкості рухів вантажу в напрямку координатних осей. Розглянуто приклад побудови траєкторій руху вантажу для випадку резонансу типу 5:2. Одержані результати проілюстровано комп'ютерними анімаціями коливань відповідних хитних пружин для різних випадків

резонансу.

Ключові слова: хитна пружина, резонанс хитної пружини, маятникові коливання, траєкторії руху.

Постановка проблеми. Наведено підхід до розв'язання класу задач, де в рамках певної динамічної системи її нелінійно зв'язані коливальні компоненти можуть обмінюватися енергією між собою. У роботах [1,2] наведено багато прикладів таких задач. Для ілюстрації такого підходу використовують *двовимірний пружинний маятник* як механічну модель дослідження декількох нелінійно зв'язаних систем. Двовимірний пружинний маятник в ідеалізованому вигляді складається з «точкового» вантажу маси m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо. Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому *зберігаючи вісь пружини прямолінійною*. Точковий вантаж одночасно приймає участь у двох видах коливань: подібних пружині – коли переміщається уздовж прямолінійної осі пружини, і подібних маятнику – коли здійснює коливання сумісно з її віссю. Такий різновид коливальної системи в літературі одержав назву хитної пружини (swinging spring) [3]. За допомогою хитної пружини наочно ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями.

Особливе значення має дослідження умови виникнення стану резонансу хитної пружини. Тобто коли частота поздовжніх коливань відрізнятиметься в кратну кількість разів від частоти поперечних коливань. Стан резонансу зручно інтерпретувати за допомогою періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини, знайденої серед можливих траєкторій руху. Для її визначення необхідно розробити універсальний спосіб синтезу множини траєкторій залежно від параметрів хитної пружини, а також, що важливо, від параметрів ініціювання її коливань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У наших статтях [4, 5] наведено огляди робіт, присвячених тематиці хитних пружин – у тому числі і з врахуванням стану їх резонансу. Наголошується, що рух вантажу хитної пружини складніший порівняно з вантажем математичного маятника, тому ефект від використання хитної пружини у якості механічної інтерпретації буде очікувано більш глибоким.

В результаті огляду літературних джерел були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступну проблему досліджень. Розробити універсальний спосіб синтезу траєкторії переміщення вантажу хитної

пружин залежно від особливостей стану її резонансу. А саме - враховуючи не лише основні параметри хитної пружини (жорсткість, довжину у ненавантаженому стані та масу вантажу), але і початкові умови ініціювання коливань.

Формулювання цілей статті. Описати процес руху хитної пружини для резонансу 5:2 з врахуванням основних параметрів хитної пружини і початкових умови ініціювання коливань.

Основна частина. В процесі побудови зображень траєкторій хитної пружини спиратимемося на роботи [1,2]. Проміжні результати будемо опускати, і наводитимемо лише готові результати. Траєкторію переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу хитної пружини визначимо за допомогою системи диференціальних рівнянь відносно координат точки коливання відносно горизонталі і вертикалі:

$$\ddot{X} + \omega_x^2 X = 2cXY; \quad \ddot{Y} + \omega_y^2 Y = cX^2. \quad (1)$$

Тут позначено: $\omega_x^2 = \frac{g}{L}$; $\omega_y^2 = \frac{k}{m}$; $c = \frac{h}{2L^2} \omega_y^2$.

Рівняння (1) в процесі коливань пов'язують масу вантажу m , початкову довжину пружини у ненавантаженому стані h , жорсткість пружини k , до яких ще слід додати початкові умови для виникнення коливань. Повну довжину пружини позначено L . Нагадаємо, що через $\omega_y = \sqrt{k/m}$ позначено частоту поздовжніх коливань точки на невідхиленій пружині, а через $\omega_x = \sqrt{g/h}$ - частоту бічних коливань точки на осі пружини як математичному маятнику ($g = 9.81$).

Множину траєкторій будемо за умови зміни початкових значень x_0, Dx_0, y_0, Dy_0 положення точки на площині Oxy . Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=2.2$; $h=5$; $k=27$; $L=5$. Тоді $\omega_y/\omega_x = 5/2$. Тобто умова резонансу типу 5:2 буде виконуватися. Нехай $x_0=0.15$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$, а параметр y_0 змінюється в межах $0.1 < y_0 < 1$. На рис. 1 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0 = 1$. У випадку довільно обраних параметрів траєкторія вантажу хитної пружини може заповнювати деяку область площини. За допомогою обрання значення параметра y_0 можна досягти того, що траєкторія матиме вигляд періодичної кривої. Вибір y_0 впливає на співвідношення амплітуд графіків відхилень коливань. На рис. 2 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною. Згідно принципу "мінімальної

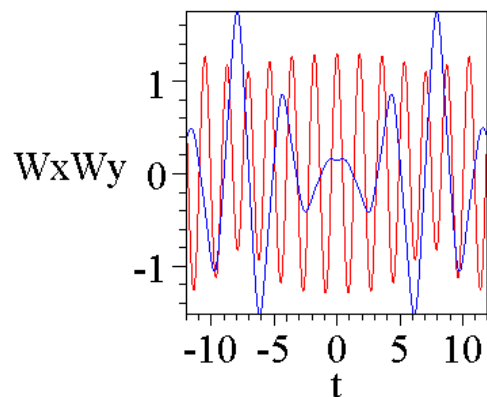


Рис. 1. Графіки відхилень точки від осей для $y_0 = 1$

енергії" логічно вважати, що саме найкоротшу періодичну траєкторію слід обирати при реалізації конкретного впровадження.

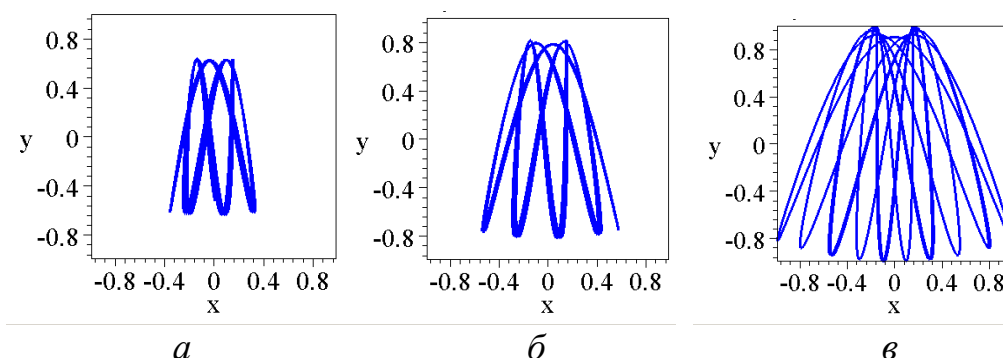


Рис. 2. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для: *a* – $y_0=0.64$; *б* – $y_0=0.82$; *в* – $y_0=1$

За виглядом одержаних періодичних траєкторій легко порівнювати особливості одного і того ж типу резонансу. В роботі [6] наведено комп'ютерні анімації, які ілюструють одержаний результат.

Висновки. Для існування резонансу типу 5:2 слід обрати такі значення параметрів: $m=2.2$; $h=5$; $k=27$; $L=5$; $x_0=0.15$; $y_0=0.82$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$. Тоді траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

Література

1. De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2018. Vol. 509. P. 1110–1119.
2. De Sousa M.C., Marcus F.A., Caldas I.L., Viana R.L. Energy Distribution in Spring Pendulums. 2017. URL: https://www.researchgate.net/publication/316187700_Energy_Distribution_in_Spring_Pendulums.
3. Булдакова Д. А., Кирюшин А. В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники. *Электронное издание «Ученые заметки ТОГУ»*, 2015. Том 6, № 2. С. 238 – 243.
4. Kutsenko L., Semkiv O., Kalynovsky A., Zapolskiy L., Shoman O. et al Development of a method for computer simulation of a swinging spring load movement path. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 1, Issue 7 (97). P. 60–73.
5. Kutsenko L., Vanin V., Shoman O., Zapolskiy L., Yablonskiy P., et al Synthesis and classification of periodic motion trajectories of the swinging spring load. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 2, Issue 7 (98). P. 26–37.

6. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Шевченко С. М. Ілюстрації до статті "Моделювання резонансу хитної пружини на основі синтезу траєкторії руху її вантажу", 2019.
URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/8950>.

ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА КАЧАЮЩЕЙСЯ ПРУЖИНЫ В СОСТОЯНИИ ЕЕ РЕЗОНАНСА

Куценко Л.Н., Запольский Л.Л.

Построены резонансные траектории движения груза качающейся пружины. Качающейся пружиной (swinging spring) называют разновидность математического маятника, который состоит из точечного груза, присоединенного к невесомой пружины. Второй конец пружины неподвижен. Рассматриваются маятниковые колебания пружины в вертикальной плоскости при условии сохранения прямолинейности ее оси. Расчеты выполнены на базе решений системы дифференциальных уравнений, с компонентами, в которые входят значения частот вертикальных и горизонтальных перемещений точки на пружине.

Целесообразность изучения этой темы определяется необходимостью исследования технологических процессов динамических систем, когда нелинейно связанные колебательные компоненты системы обмениваются энергией между собой. С помощью феномена качающейся пружины иллюстрируется обмен энергиями между поперечными (маятниковыми) и продольными (пружинными) колебаниями. Особое значение имеет исследование состояния резонанса качающейся пружины - когда частота продольных колебаний отличаются в кратное количество раз от частоты поперечных колебаний. Кроме распространенного случая резонанса 2:1 существует необходимость решать задачи с другими значениями отношения частот.

Полученные результаты позволяют с помощью компьютера синтезировать траекторию движения груза качающейся пружины, которая будет соответствовать заданному отношению частот продольных и поперечных колебаний. Для этого, помимо основных параметров (массы груза, жесткости пружины и ее длины в ненагруженном состоянии), еще привлекаются начальные значения параметров инициализации колебаний. В частности, «стартовые» координаты положения груза, и начальные скорости движений груза в направлении координатных осей. Рассмотрены примеры построения траекторий движения груза для случая резонансов типа 5:2. Полученные результаты проиллюстрированы компьютерными

анимациями колебаний соответствующих качающихся пружин для различных случаев резонанса.

Ключевые слова: качающаяся пружина, резонанс качающейся пружины, маятниковые колебания, траектории движения.

TRAJECTORIES OF MOVEMENT OF CARGO SWINGING SPRINGS IN THE CONDITION OF ITS RESONANCE

Kutsenko L., Zapolskiy L.

A method for constructing resonant trajectories of the motion of a swinging spring load is given. A swinging spring is a kind of mathematical pendulum that consists of a point load attached to a weightless spring. The second end of the spring is fixed. Pendulum oscillations of a spring in a vertical plane are considered under the condition that its axis is kept straight. The calculations are made on the basis of solutions of a system of differential equations, with components that include the values of the frequencies of the vertical and horizontal displacements of a point on the spring. The relevance of the topic is determined by the need to study the technological processes of dynamic systems when nonlinearly coupled oscillatory components of the system exchange energy with each other. With the help of the swing spring phenomenon, the energy exchange between transverse (pendulum) and longitudinal (spring) oscillations is illustrated. Of particular importance is the study of the state of oscillation of the swinging spring - when the frequency of the longitudinal oscillations differ by a factor of several times the frequency of the transverse oscillations. In addition to the common case 2:1 resonance, there is a need to solve problems with other values of the frequency ratio.

The results obtained allow using the computer to synthesize the trajectory of the load of the oscillating spring, which will correspond to a given ratio of the frequencies of longitudinal and transverse oscillations. For this, in addition to the basic parameters (the mass of the load, the spring stiffness and its length in the unloaded condition), the initial values of the parameters for the initiation of oscillations are also used. In particular, the "starting" coordinates of the position of the load, and the initial velocity of movement of the load in the direction of the axes. The examples of the construction of the trajectories of the movement of the load for the case of resonances of type 5:2 are considered. The obtained results are illustrated by computer animations of oscillations of the corresponding swinging springs for various cases of resonance.

Keywords: swing spring, swing spring resonance, pendulum oscillations, trajectories of motion.