

УДК 514.18

## ГІПЕРПОВЕРХНІ ТРАЄКТОРІЙ ФАЗОВИХ $n$ -ПРОСТОРІВ

Гумен О.М., д.т.н.

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна),*

Лясковська С.Є., к.т.н.

*Національний університет «Львівська політехніка» (Україна),*

Мартин Є.В., д.т.н.

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності (Україна)*

*У статті викладені основні засади геометричного моделювання процесів багатопараметричних технічних систем. Узагальнюються засоби моделювання траєкторій стану і фазових траєкторій на евклідові багатовимірні фазові простори, зручні у наукових та практичних дослідженнях широкого спектру систем різного походження: технічних, біологічних, соціальних.*

*Розвиток графічних інформаційних технологій, спираючись на міцний фундамент засобів інженерної наукової графіки, потребує вдосконалення базового інструментарію класичної багатовимірної прикладної геометрії. Серед розмаїття застосувань основних її положень слід виділити завдання, пов'язані з дослідженнями динаміки систем різного походження. Використання фазових траєкторій для дослідження динаміки систем реалізується засобами фазової площини багатовимірного простору. Побудова образної геометричної моделі у вигляді 1-багатовиду охоплюючого евклідового  $n$ -простору потребує обґрунтування і вибору геометричного інструментарію для ілюстрації суті його формоутворення з подальшою комп'ютерною візуалізацією.*

*Основна увага приділяється процесам формування траєкторій стану і фазових траєкторій на засадах узагальнення положення про перетин двох поверхонь тривимірного простору, зокрема, двох площин. Запропоновані засоби формування множини фазових траєкторій як гіперповерхні фазового  $n$ -простору. Трактуються основних положень виконано, опираючись на закладений основоположником Української школи багатовимірної геометрії М.С. Гуменом науковий фундамент.*

*Перспективними напрямками розвитку прикладної багатовимірної геометрії є, зокрема, узагальнення теоретичних положень дискретної геометрії С. Ковальова, розвиток геометрії простору параметрів, запропонованого А. Найдишем і розвинутого в дослідженнях В. Комяк. Показана актуальність подальших*

напрацювань в частині дослідження областей параметрів проектуванням відповідних різноманіть в лінійні підпростори вищих розмірностей.

*Ключові слова:* геометричне моделювання, фазові траєкторії, модель, багатопараметричні технічні системи.

**Постановка проблеми.** Розвиток графічних інформаційних технологій, спираючись на міцний фундамент засобів інженерної наукової графіки, вимагає удосконалення базового інструментарію класичної багатовимірної прикладної геометрії. З-поміж розмаїття застосувань основних її положень слід виділити задачі, пов'язані з дослідженнями динаміки систем різного походження. Використання фазових траєкторій для дослідження динаміки систем реалізується засобами фазової площини багатовимірного простору.

Побудова образної геометричної моделі у вигляді 1-багатовиду охоплюючого евклідового  $n$ -простору потребує обґрунтування і вибору геометричного інструментарію для унаочнення суті його формоутворення з подальшою комп'ютерною візуалізацією.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Узагальнення геометричних образів на багатовиди охоплюючих евклідових просторів прослідковуємо у працях С. Ковальова [1], дослідженні та розвиненні засобів Балюби-Найдиша числення [2]. Зазначені праці стосуються чисто прикладних сфер практичного використання в частині конструювання технічних форм. Цікавим і перспективним є використання прикладної багатовимірної геометрії у віртуальному вимірі як допоміжний геометричний апарат у вигляді багатовимірного простору параметрів, розвиненого в [3].

**Формулювання цілей статті.** Метою дослідження є модельні обґрунтування формоутворення 1-багатовидів  $n$ -просторів щодо формування фазових траєкторій та гіперповерхонь фазових  $n$ -просторів.

Для досягнення поставленої мети слід розв'язати наступні задачі:

- запропонувати модель для обґрунтування процесу формоутворення фазових траєкторій;
- запропонувати графічні інформаційні технології для візуалізації багатовидів фазових  $n$ -просторів.

**Основна частина.** При зростанні вимірності простору збільшується кількість варіантів одержання того чи іншого багатовиду з використанням різної розмірності багатовидів та гіперповерхонь, що перетинаються [1].

Фазова траєкторія визначена у  $n$ -вимірному фазовому просторі усіма  $n$  її параметрами, а також початковими умовами. При постійних

початкових умовах і зміні параметрів (коефіцієнтів) характеристичного рівняння розмірність простору визначається кількістю змінних параметрів. Найменшою є розмірність простору для систем другого порядку при зміні одного параметра з двовимірною поверхнею фазових траєкторій. Розмірність простору зростає пропорційно збільшенню кількості змінних параметрів. Для системи другого порядку такий простір стає шестивимірним при зміні ще двох коефіцієнтів диференціального рівняння.

У значному числі випадків фазові траєкторії можуть бути подані рівнянням, яке справедливе при відомому діапазоні зміни параметрів  $a_i$ . Гіперповерхня може бути описана аналітично за методами [1] і подана проєкціями у двовимірних чи тривимірних площинах.

Побудуємо гіперповерхню фазового простору для системи другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c = 0 \quad (1)$$

з урахуванням початкової умови:  $x = x_0 = 100$  при  $t = 0$ .

Після перетворень рівняння гіперповерхні фазового простору має вигляд:

$$x = \frac{c}{b^2} \left( \frac{|by + c|}{c} + \ln \frac{|by + c|}{c} - 1 \right) + x_0. \quad (2)$$

Криву  $a$ , 1-багатовид чотиривимірного простору  $Oxzyt$ , можна також побудувати (рис. 1), використовуючи перетин циліндрів нижчої розмірності.

Виділимо у тривимірному підпросторі, наприклад,  $Oxzt$  двовимірний циліндр  $\Pi_{tx}$  з напрямною  $x = x(t)$  у площині  $Oxt$ , а у тривимірному підпросторі, наприклад,  $Oxzt$  двовимірний циліндр  $\Pi_{tz}$  з напрямною  $z = z(t)$  у площині  $Ozt$ . Обидва двовимірних циліндри мають спільний тривимірний підпростір  $Oxzt$  і, перетинаючись, визначають положення кривої  $a_{txz}$  цього простору. У чотиривимірному просторі крива  $a_{txz}$  є напрямною двовимірного циліндра  $\Pi_{txz}$ , твірні якого паралельні осі  $Oy$  цього простору.

Крива  $y = y(t)$  двовимірної площини проєкцій  $Oyt$  являє собою напрямну одночасно двох двовимірних циліндрів. Для першого циліндра  $\Pi_{tyx}$  твірними слугують прямі, паралельні осі  $Ox$  тривимірного підпростору  $Oxut$ . Для другого циліндра  $\Pi_{tyz}$  твірними слугують прямі, паралельні осі  $Oz$  тривимірного підпростору  $Oyzt$ . Підпростори мають спільну двовимірну площину  $Oyt$  і розташовані у чотиривимірному просторі ортогонально. Отже, напрямні цих циліндрів також взаємно ортогональні.



4-простору виконується, якщо задані три її ортогональні проекції [1] або, наприклад, дві проекції 1-багатovidу, які враховують усі чотири його виміри (рис. 2).

Наукові розробки, які стосуються використання засобів багатовимірної прикладної геометрії враховують властивості подання тих чи інших багатовидів охоплюючого простору. Використання інструментарію прикладної багатовимірної геометрії у прикладних технічних дослідженнях може знайти ширше застосування через обґрунтування їх формоутворення та моделювання.

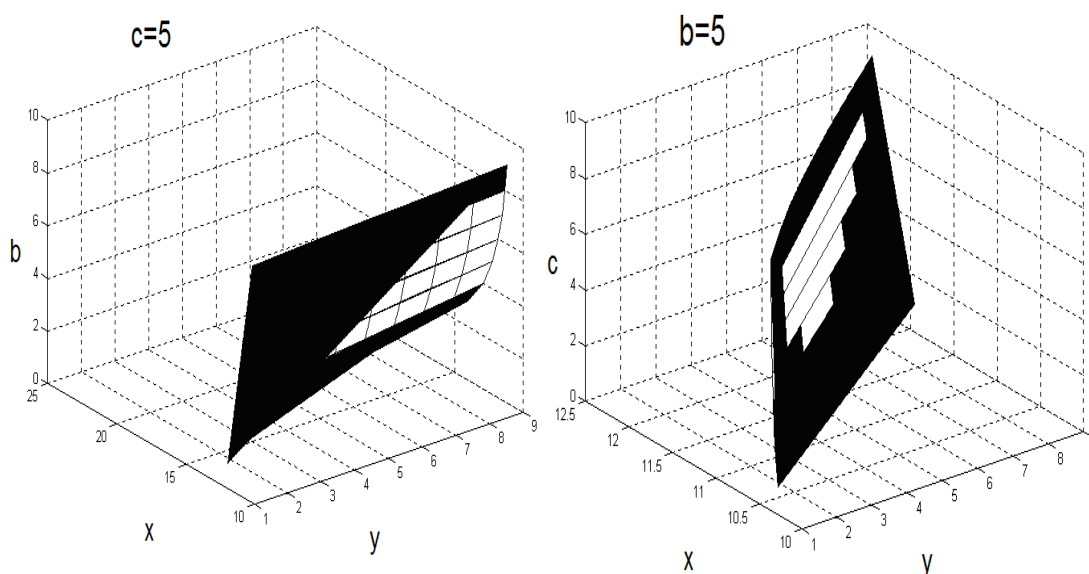


Рис. 2. Переріз гіперповерхні чотиривимірного фазового простору

**Висновки.** Основним фундаментом прикладних застосувань графічних інформаційних технологій [4] є моделі та засоби, запропоновані основоположником Української школи прикладної багатовимірної геометрії М. Гуменом. Перспективними напрямками розвитку прикладної багатовимірної геометрії є, зокрема, узагальнення теоретичних положень дискретної геометрії С.Ковальова, ліній і поверхонь у БН-численні, розвиток геометрії простору параметрів, запропонованого А. Найдишем і розвиненого в розвідках В. Комяк. Показана актуальність подальших напрацювань у частині дослідження областей параметрів проєкціюванням відповідних багатовидів у лінійні підпростори вищих вимірностей.

### **Література**

1. Прикладна геометрія та інженерна графіка / [Ковальов С.М., Гумен М.С. та ін.]. – Луцьк: ЛДТУ, 2006. С. 58-79.
2. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Найдиш А.В. Композиційний метод утворення поверхонь: суть, особливості та перспективи використання у моделюванні багатофакторних процесів. *Зб. тез*

доп. XII Міжн. наук.-пр. конф. «Обухівські читання». К.: НУБіП, 2017. С. 94-99.

3. Данілін О.М., Комяк В.М. Задачі упаковки та розкрою в розв'язанні прикладних задач. Прикладні питання математичного моделювання. 2018. № 2. С. 35-42.
4. Гумен О.М., Лясковська С.Є., Мартин Є.В. Графічні інформаційні технології у підготовці фахівців технологічних спеціальностей. Теорія та методика електронного навчання. Кривий Ріг: Видавничий відділ КМІ, 2013. Вип. IV. С.65-68.

## **ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ФАЗОВЫХ n-ПРОСТРАНСТВ**

Гумен Е.Н., Лясковская С.Е., Мартын Е.В.

*В статье изложены основные принципы геометрического моделирования процессов многопараметрических технических систем. Обобщаются средства моделирования траекторий состояния и фазовых траекторий на евклидовы многомерные фазовые пространства, удобные в научных и практических исследованиях широкого спектра систем различного происхождения: технических, биологических, социальных.*

*Развитие графических информационных технологий, опираясь на прочный фундамент средств инженерной научной графики, требует усовершенствования базового инструментария классической многомерной прикладной геометрии. Среди разнообразия применений основных ее положений следует выделить задачи, связанные с исследованиями динамики систем различного происхождения. Использование фазовых траекторий для исследования динамики систем реализуется средствами фазовой плоскости многомерного пространства. Построение образной геометрической модели в виде 1-многообразия охватывающего евклидова n-пространства требует обоснования и выбора геометрического инструментария для иллюстрации сути его формообразования с последующей компьютерной визуализацией.*

*Основное внимание уделяется процессам формирования траекторий состояния и фазовых траекторий на основе обобщения положения о пересечении двух поверхностей трехмерного пространства, в частности, двух плоскостей. Предложены средства формирования множества фазовых траекторий как гиперповерхности фазового n-пространства. Трактовки основных положений выполнено, опираясь на заложенный основателем Украинской школы многомерной геометрии Н. Гуменом научный фундамент.*

*Перспективными направлениями развития прикладной многомерной геометрии являются, в частности, обобщение*

*теоретических положений дискретной геометрии С. Ковалева, развитие геометрии пространства параметров, предложенного А.Найдышем и развитого в исследованиях В. Комяк. Показана актуальность дальнейших наработок в части исследования областей параметров проецированием соответствующих многообразий в линейные подпространства высших размерностей.*

*Ключевые слова: геометрическое моделирование, фазовые траектории, модель, многопараметрические технические системы.*

## **HYPERSURFACES OF PHASE $n$ -SPACES TRAJECTORIES**

Gumen O., Ljaskovska S., Martyn Ye.

*The article outlines the basic principles of geometric modeling of processes of multiparameter technical systems. The means of simulating state trajectories and phase trajectories for Euclidean multidimensional phase spaces, which are convenient in scientific and practical researches of a wide spectrum of systems of various origin: technical, biological, and social, are generalized.*

*The development of graphic information technology, based on the solid foundation of engineering scientific graphics, requires the improvement of basic tools of classical multidimensional applied geometry. Among the diversity of applications of its main provisions should be assigned tasks related to the study of the dynamics of systems of different origins. The use of phase trajectories to study the dynamics of systems is realized by means of the phase plane of multidimensional space. The construction of a figurative geometric model in the form of a 1-manifold of enveloping Euclidean  $n$ -space requires the justification and choice of a geometric toolkit to reveal the essence of its formation with subsequent computer visualization.*

*The main attention is paid to the processes of formation of state trajectories and phase trajectories on the basis of the generalization of the position on the intersection of two surfaces of a three-dimensional space, in particular two planes. The means of forming a plurality of phase trajectories as hyper-surfaces of the phase  $n$ -space are proposed. Basic provisions interpretation is made on the basis of the Ukrainian school of multidimensional geometry founder M. Gumen scientific foundation.*

*The perspective directions of the development of applied multidimensional geometry are, in particular, the generalization of the theoretical positions of discrete geometry by S. Kovalev, the development of the geometry of the parameters of space proposed by A. Naydysh and developed in the works of V. Komyak. The actuality of further developments in the part of parameter regions study by projection of the corresponding manifolds into linear subspaces of higher measurements is shown.*

*Key words: geometric modeling, phase trajectories, model, multiparameter technical systems.*