УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОРСОВИХ ПОВЕРХОНЬ З РЕБРОМ ЗВОРОТУ АПАРАТОМ БН–ЧИСЛЕННЯ

Літвінов А.І.,
Пахаренко В.О., д.т.н.,
Лебедєв В.О., к.т.н.,
Спірінцев Д.В., к.т.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Відокремлений структурний підрозділ «Мелітопольський коледж Таврійського державного агротехнологічного університету»
(Україна)

У статті розглядається приклад використання інструментів математичного апарату БН-обчислення для геометричного моделювання торсових поверхонь з ребром звороту, що володіє наперед заданими характеристиками. Спосіб побудови торсової поверхні виходить з її визначення і має на меті визначення дотичної, що утворює торсову поверхню, в кожній точці ребра звороту, яке є направляючої шуканої торсової поверхні. При цьому ребро звороту повинно бути просторовою кривою як мінімум двоякої кривизни.

Одними з найбільш простих і в той же час легко керованих різновидів просторових кривих, що володіють необхідними властивостями, є криві однієї відносини, форма яких управляється двома інженерними дискримінантами f_P *і* f_Q*. Змінюючи їх значення в межах від 0 до 1 можна змоделювати різні форми ребра звороту і, відповідно, торсової поверхні. Слід зазначити, що при значенні інженерного дискримінанту* $f_P = f_Q = 0{,}5$ *отримаємо окремий випадок - криві Без'є третього порядку. В результаті отримані точкові рівняння і обчислювальні алгоритми моделювання торсових поверхонь за допомогою дуг просторових кривих третього порядку, утворених за допомогою наступних комбінацій різновидів кривих другого порядку: параболи і гіперболи, гіперболи і еліпса, еліпса і параболи, параболи і параболи, еліпса і еліпса, гіперболи і гіперболи. Використовуючи можливості сучасної комп'ютерної графіки, на основі отриманих точкових рівнянь і обчислювальних алгоритмів в роботі, представлена візуалізація деяких із прикладів отриманих торсових поверхонь.*

Ключові слова: апарат БН-числення, дотична, дуга кривої третього порядку, крива одного відношення, напрямна крива, ребро звороту, торсова поверхня, точкове числення Балюби-Найдиша.

Постановка проблеми. Завдяки всім властивостям поверхонь, що розгортаються, торсові поверхні володіють рядом переваг, що дозволяють проектувати за їх допомогою доволі складні конструкції. Довільна форма ребра звороту, дотичні до якого утворюють торс, дозволяє надати необхідну форму, задані технологічні властивості та роблять торсову поверхню перспективною для використання в різних областях промисловості, господарства та будівництва.

Саме тому актуальним є формування аналітичного опису з виводом рівнянь торсів, що надають можливість отримати необхідну інформацію для інженерних розрахунків оболонок з відсіків таких поверхонь, за допомогою апарату точкового БН–числення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед українських вчених, які займались розв'язанням задачі геометричного моделювання торсових поверхонь, необхідно відзначити роботи Підгорного О.Л., Балюби І.Г., Обухової В.С., Несвідоміна В.Н., Пилипаки С.Ф, Горягіна Б.Ф. та ін.

У точковому БН–численні подібна задача досліджувалась лише частково. Наприклад, у роботі Горягіна Б.Ф. представлено тільки спосіб конструювання торсової поверхні отриманого обкаткою двох конусів.

У роботі Конопацького Є.В. [1] представлено способи геометричного моделювання ряду просторових дуг кривих різних порядків, які можна використовувати в якості ребра звороту.

У роботах Давиденко І.П. [2,3] представлено способи отримання дотичної до кривої в рамках апарату точкового БН–числення.

Теоретичною базою для побудови геометричних об'єктів є апарат точкового числення Балюби-Найдиша (БН-числення), що викладено у роботах [4,5].

Формулювання цілей статті. Сформувати спосіб геометричного моделювання торсових поверхонь з ребром звороту за наперед заданими характеристиками апаратом точкового БН–числення.

Основна частина. У загальному випадку торс являє собою геометричне місце дотичних до свого ребра звороту, яким може бути будь-яка неплоска крива. Однією з вагомих умов іноді є конструювання ребра звороту наперед заданого типу. Наприклад для торсу четвертого порядку ребром звороту є просторова крива c^3 третього порядку [6].

Розглянемо симплекс $ABCD$ (рис. 1). Задамо ребро звороту торсової поверхні дугою кривої третього порядку в три вимірному просторі, як кривою одного відношення:

$$M=\left(A-D\right)\frac{f_P\overline{u}^3}{f_P\left(1-2u\right)^2+2u\overline{u}}+\left(B-D\right)\frac{f_Qu^3}{f_Q\left(1-2t\right)^2+2u\overline{u}}+$$
$$+\left(C-D\right)\left[\overline{u}-\frac{f_P\overline{u}\left(\overline{u}^2+u^2\right)}{f_P\left(1-2u\right)^2+2u\overline{u}}+\frac{f_Q\overline{u}^2u}{f_Q\left(1-2u\right)^2+2u\overline{u}}\right]+D. \tag{1}$$

Відповідно до роботи [1] регулюючи значення параметрів f_P та f_Q в межах від 0 до 1 отримано класифікацію дуг просторової кривої третього порядку, в залежності від того, які криві другого порядку утворюють перший або другий конус. Наприклад, можна отримати дуги просторової кривої третього порядку, як криві утворені за допомогою параболи та гіперболи, гіперболи та еліпсу, еліпсу та параболи тощо. Таким чином, цей підхід дозволяє конструювати різноманітні форми ребра звороту, а, отже, і торсових поверхонь.

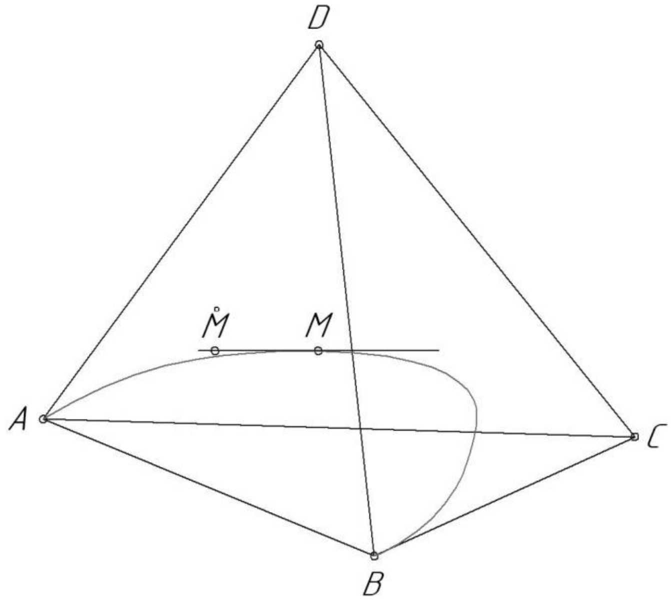


Рис. 1. Геометрична схема конструювання торсової поверхні з ребром звороту

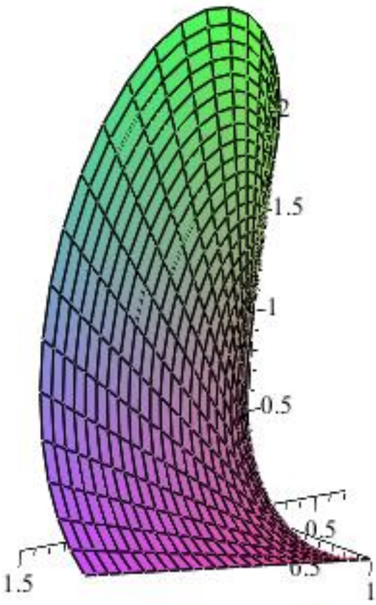
Для того щоб побудувати дотичну до ребра звороту необхідно визначити дві точки. Одна з точок, точка дотику M, завжди знаходиться на кривій, як поточна її точка. Для завдання дотичної до кривої досить визначити ще одну точку. Таким чином, параметр повинен визначати не тільки поточну точку M кривої, але і ще одну точку $\dot{M}$ дотичної до кривої в точці M:

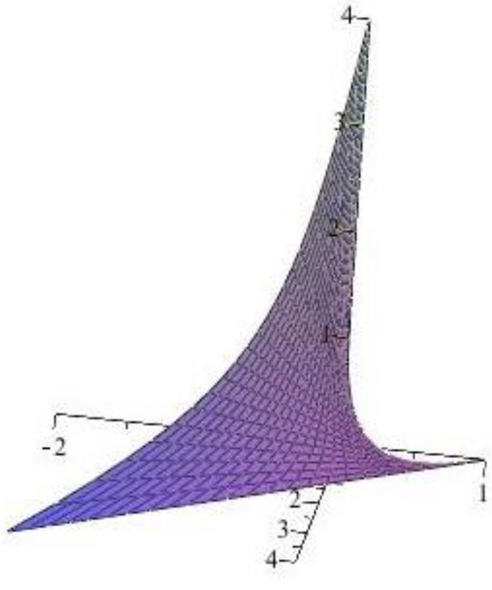
$$\dot{M}=\left(A-D\right)\frac{2f_P(-1+u)(2f_Pu-f_P-u+1)}{(f_P\left(1-2u\right)^2+2u\overline{u})^2}+\left(B-D\right)\frac{-2f_Qu(2f_Qu-f_Q-u)}{(f_Q\left(1-2u\right)^2+2u\overline{u})^2}+$$
$$+\left(C-D\right)\left[\begin{array}{l}-1+\dfrac{f_P(8f_Pu^4-16f_Pu^3-4u^4+10f_Pu^2+8u^3-2u^2-f_P-4u+2)}{(f_P\left(1-2u\right)^2+2u\overline{u})^2}\\+\dfrac{f_Q(-1+u)(4f_Qu^3-4f_Qu^2-2u^3+3f_Qu+2u^2-f_Q)}{(f_Q\left(1-2u\right)^2+2u\overline{u})^2}\end{array}\right]. \tag{2}$$

Рівняння торсової поверхні N в термінах БН-числення визначимо як рівняння прямої, що визначається параметрами u та v, що змінюються в межах від 0 до 1, та двома постійними параметрами f_P і f_Q:

$$N=\left(A-D\right)\left[\frac{f_P\bar{u}^3}{f_P\left(1-2u\right)^2+2u\bar{u}}+\frac{2f_P(-1+u)(2f_Pu-f_P-u+1)}{(f_P\left(1-2u\right)^2+2u\bar{u})^2}v\right]+$$
$$+\left(B-D\right)\left[\frac{f_Qu^3}{f_Q\left(1-2t\right)^2+2u\bar{u}}+\frac{-2f_Qu(2f_Qu-f_Q-u)}{(f_Q\left(1-2u\right)^2+2u\bar{u})^2}v\right]+D+$$
$$+\left(C-D\right)\left[\begin{array}{l}\bar{u}-v-\dfrac{f_P\bar{u}\left(\bar{u}^2+u^2\right)}{f_P\left(1-2u\right)^2+2u\bar{u}}+\dfrac{f_Q\bar{u}^2u}{f_Q\left(1-2u\right)^2+2u\bar{u}}+\\ +\dfrac{f_P(8f_Pu^4-16f_Pu^3-4u^4+10f_Pu^2+8u^3-2u^2-f_P-4u+2)}{(f_P\left(1-2u\right)^2+2u\bar{u})^2}v\\ +\dfrac{f_Q(-1+u)(4f_Qu^3-4f_Qu^2-2u^3+3f_Qu+2u^2-f_Q)}{(f_Q\left(1-2u\right)^2+2u\bar{u})^2}v\end{array}\right]. \quad (3)$$

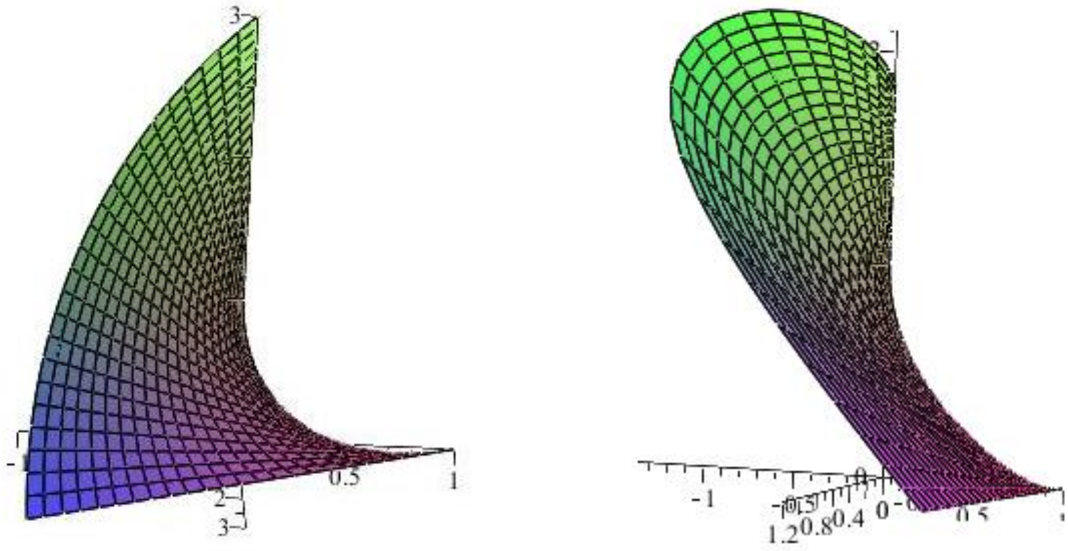
Візуалізація роботи точкового рівняння (3) та отриманих на його основі торсових поверхонь представлено на рис. 2 та 3.





а) $f_P=0{,}8$ $f_Q=0{,}8$; б) $f_P=0{,}4$ $f_Q=0{,}4$;

Рис. 2. Торсові поверхні з ребром звороту за наперед заданими характеристиками



а) $f_P = 0{,}5$ $f_Q = 0{,}5$; б) $f_P = 0{,}9$ $f_Q = 0{,}7$;

Рис. 3. Торсові поверхні з ребром звороту за наперед заданими характеристиками

Висновки. У статті засобами апарату БН-числення було запропоновано спосіб геометричного моделювання торсових поверхонь з ребром звороту за наперед заданими характеристиками. Представлені точкові рівняння дозволяють конструювати довільну форму ребра звороту та торсу відповідно. Це дає можливість задати необхідні технологічні властивості торсової поверхні та проводити інженерні розрахунки. У перспективі планується розглядати інші просторові криві в якості ребер звороту.

Література

1. Конопацький Є. В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша : дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / Таврійський державний агротехнологічний університет. Мелітополь, 2012. 163 с.
2. Давиденко І. П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01. Мелітополь, 2012. 23 с.
3. Балюба І. Г., Давиденко І. П. Похідна кривої та прямокутна сітка на поверхні. Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. Мелітополь, 2003. Вип. 4. С. 45–48.
4. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении : дис. … д-ра техн. наук : 05.01.01. Мелитополь, 1995. 227 с.
5. Балюба И. Г., Найдыш В. М. Точечное исчисление : учеб. пособ. / за ред. В. М. Верещаги. Мелитополь : МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. 236 с.

6. Кривошапко С. Н. Конструирование по заданному ребру возврата. *Торсовые поверхности и оболочки* : справочник. Москва, 1991. С. 16 –17.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РЕБРОМ ВОЗВРАТА АППАРАТОМ БН–ИСЧИСЛЕННЯ

Литвинов А.И., Пахаренко В.А., Лебедев В.А.,Спиринцев Д.В.

В статье рассматривается пример использования инструментов математического аппарата БН-исчисления для геометрического моделирования торсовых поверхностей с ребром возврата, обладающим наперёд заданными характеристиками. Способ построения торсовой поверхности исходит из её определения и подразумевает определение касательной, как образующей торсовой поверхности, в каждой точке ребра возврата, которое является направляющей искомой торсовой поверхности. При этом ребро возврата должно быть пространственной кривой как минимум двоякой кривизны.

Одними из наиболее простых и вместе с тем легко управляемых разновидностей пространственных кривых, обладающих необходимыми свойствами, являются кривые одного отношения, форма которых управляется двумя инженерными дискриминантами f_P *и* f_Q*. Изменяя их значения в пределах от 0 до 1 можно смоделировать различные формы ребра возврата и, соответственно, торсовой поверхности. Следует отметить, что при значении инженерного дискриминанта* $f_P = f_Q = 0{,}5$ *получим частный случай – кривые Безье 3-го порядка. В результате получены точечные уравнения и вычислительные алгоритмы моделирования торсовых поверхностей с помощью дуг пространственных кривых 3-го порядка, образованных с помощью следующих комбинаций разновидностей кривых 2-го порядка: параболы и гиперболы, гиперболы и эллипса, эллипса и параболы, параболы и параболы, эллипса и эллипса, гиперболы и гиперболы. Используя возможности современной компьютерной графики, на основе полученных точечных уравнений и вычислительных алгоритмов в работе, представлена визуализация некоторых из примеров полученных торсовых поверхностей.*

Ключевые слова: аппарат БН-исчисления, касательная, дуга кривой третьего порядка, кривая одного отношения, направляющая кривая, ребро возврата, торсовая поверхность, точечное исчисление Балюба-Найдиша.

GEOMETRICAL MODELING OF TORSION SURFACES WITH RETURN EDGE BY THE BN-CALCULUS APPARATUS

Litvinov A., Pakharenko V., Lebedev V., Spirintsev D.

The article discusses an example of using the tools of the mathematical apparatus of BN-calculus for geometric modeling of torsion surfaces with a return edge, which have predetermined characteristics. The method of constructing a torsion surface is based on its definition and implies the definition of a tangent, as forming a torsion surface, at each point of the return edge, which is the guiding target torsion surface. At the same time, the return edge must have a spatial curve of at least a double curvature.

One of the most simple and at the same time easily controlled varieties of spatial curves with the necessary properties are curves of one relation, the shape of which is controlled by two engineering discriminants f_P *and* f_Q*. By changing their values in the range from 0 to 1, it is possible to model various forms of the return edge and, accordingly, the torso surface. It should be noted that when the value of the engineering discriminant* $f_P = f_Q = 0{,}5$ *we obtain a special case - Bezier curves of the third order. As a result, point equations and computational algorithms for modeling torso surfaces using arcs of third-order spatial curves, formed using the following combinations of second-order curve varieties: parabolas and hyperbolas, hyperbolas and ellipses, ellipses and parabolas, parabolas and parabolas, ellipses and ellipse, hyperbola and hyperbola. Using the capabilities of modern computer graphics, based on the obtained point equations and computational algorithms in the work, visualization of some of the examples of the obtained torsion surfaces is presented.*

Key words: Arc of the third-order curve, BN-calculus apparatus, curve of one relation, guide curve, point calculus of Balyuba-Naydysh, return edge, tangential, torso-surface.