

УДК 514.18

БН-ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЧОТИРЬОХ ТОЧОК У ПЛОЩИНІ

Лисенко К.Ю., аспірант* ,

Верещага В.М., д.т.н.,

Найдиш А.В., д.т.н.

*Мелітопольська школа прикладної геометрії,**Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)*

У роботі надається узагальнена техніка алгебраїчного утворення характеристичних функцій для Б-фігур, надається спосіб розрахунку БН-координат для інтерполянта, що інтерполює заздалегідь визначені полюси інтерполяції. Розроблено алгебраїчну техніку формування Б-функцій для чотирьох точок, у загальному вигляді, тобто для усіх можливих варіантів значень параметрів від 0 до 1 для двох точок, що знаходяться всередині відрізка. У рамках точкового БН-числення досить часто застосовують функції-параметри, які названі авторами Б-функції, що, при визначених наперед значеннях параметрів, дорівнюють одиниці або нулю Б-функції, є параметрами Б-кривих, які подані у точковій формі, і використовуються у створенні моделей процесів або ситуацій. Застосування запропонованої техніки алгебраїчного формування Б-функцій дозволить створити клас Б-кривих, на основі яких буде виконуватися моделювання багатofакторних процесів. Наведена узагальнена техніка алгебраїчного формування характеристичних функцій та розрахунок БН-координат для чотирьох точок у площині, дає можливість безпомилкового і швидкого знаходження інтерполянта у точковій формі. Це значно прискорює створення моделей для систем з використанням методу композиційного геометричного моделювання багатofакторних систем. Методи алгебраїчного знаходження інтерполянта, у більшості своїй, потребують розв'язання систем лінійних рівнянь, збільшення розмірів яких підвищує похибку розрахунків. БН-інтерполяція позбавлена цієї вади. Однак, знаходження БН-інтерполянта, степінь якого більша за 3, викликає певні труднощі. Запропонована у цій статті узагальнена техніка алгебраїчного утворення характеристичних функцій значно спрощує знаходження БН-інтерполянта степеня >3 .

Ключові слова: Б-криві, Б-функції, БН-інтерполяція,

* Науковий керівник – д.т.н., проф.. Верещага В.М.

БН-координати, Б-фігури, техніка формування, точкове числення Балюби-Найдиша (БН-числення).

Постановка проблеми. Відомі методи алгебраїчного знаходження інтерполянта [1-4], у більшості своїй, потребують розв'язання систем лінійних рівнянь, збільшення розмірів яких підвищує похибку розрахунків. БН-інтерполяція позбавлена цієї вади. Однак, знаходження БН-інтерполянта, степінь якого ≥ 3 , викликає певні труднощі. Запропонована у цій статті узагальнена техніка алгебраїчного утворення характеристичних функцій значно спрощує знаходження БН-інтерполянта степеня >3 .

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [5, 6] були намагання створити алгебраїчну техніку утворення характеристичних функцій, але, на наш погляд, вони виявилися не досить вдалим для практичної реалізації через їх складну алгоритмізацію.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є розробити узагальнену, у найбільшій мірі, техніку алгебраїчного формування характеристичних функцій, які дозволять розрахувати БН-координати для Б-кривої, що геометрично інтерполюють чотири точки, які знаходяться у площині.

Основна частина.

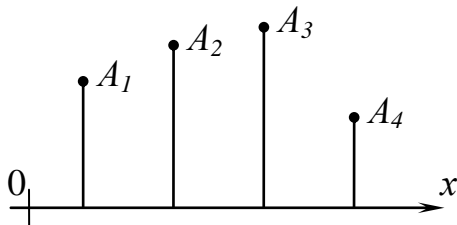


Рис. 1. Вихідні точки

Нехай у площині задано чотири точки A_i ; $i = \overline{1,4}$ (рис. 1), для яких необхідно утворити чотири характеристичні функції.

Геометрична БН-матриця параметрична, що відповідає цим вимогам, матиме наступний вигляд:

$$A_{\Pi} = \left(\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \quad (1)$$

1) Сформулюємо першу характеристичну функцію p_1 .

Виходячи з (1) елемент p_{14} , що є першим множником характеристичної функції p_1 , матиме вигляд:

$$p_{14}(t) = \lambda_{14}(t_4 - t), \quad (2)$$

де λ_{14} – довільне дійсне число (ваговий коефіцієнт); t_4 – параметр четвертої точки A_4 , що визначає її положення уздовж числової прямої Ox ; t – поточний параметр.

Другий множник p_{13} характеристичної функції p_1 матиме

вигляд:

$$p_{13}(t) = \lambda_{13}\lambda_{14}(t_4 - t)(t_3 - t), \quad (3)$$

де λ_{13} – довільне дійсне число (ваговий коефіцієнт); t_3 – параметр точки A_3 , що визначає її положення уздовж числової прямої Ox .

Третій множник p_{12} для p_1 буде мати вигляд:

$$p_{12}(t) = \lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14}(t_4 - t)(t_3 - t)(t_2 - t), \quad (4)$$

де λ_{12} – довільне дійсне число; t_2 – параметр точки A_2 .

І насамкінець, сформуємо першу характеристичну функцію p_1 :

$$p_1(t) = f_{11}(t) \cdot p_{12}(t).$$

Враховуючи вимогу (1), запишемо:

$$1 = f_{11}(t) \cdot p_{12}(t) \rightarrow f_{11}(t) = \frac{1}{p_{12}(t)} = \frac{1}{\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14}(t_4 - t)(t_3 - t)(t_2 - t)} = \alpha_{11}. \quad (5)$$

Тоді запишемо:

$$p_{11}(t) = \alpha_{11}\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14}(t_4 - t)(t_3 - t)(t_2 - t) = p_1. \quad (6)$$

Як бачимо, останній множник $p_{11} = p_1$ дорівнює шуканій характеристичній функції p_1 .

2) Сформулюємо другу характеристичну функцію (ХФ) p_2 , враховуючи геометричну БН-матрицю параметричну (1).

Перший множник p_{24} для ХФ p_2 буде мати наступний вигляд:

$$p_{24}(t) = \lambda_{24}(t_4 - t), \quad (7)$$

де λ_{24} – довільне дійсне число (ваговий коефіцієнт).

Другий множник p_{23} для ХФ p_2 матиме вигляд:

$$p_{23}(t) = \lambda_{23}\lambda_{24}(t_4 - t)(t_3 - t), \quad (8)$$

де λ_{23} – довільне дійсне число (ваговий коефіцієнт).

Третій множник $p_{21}(t)$ для ХФ p_2 буде таким:

$$p_{21}(t) = \lambda_{21}\lambda_{23}\lambda_{24}(t_4 - t)(t_3 - t)(t_2 - t), \quad (9)$$

де λ_{21} – довільне дійсне число, що $\lambda_{21} \neq 0$.

Четвертий множник p_{22} буде дорівнювати самій ХФ p_2 .
Запишемо його:

$$p_{22}(t) = f_{22}(t) \cdot p_{21}(t) \rightarrow 1 = f_{22}(t) \cdot p_{21}(t); \rightarrow$$

$$f_{22}(t) = \frac{1}{p_{21}(t)} = \frac{1}{\lambda_{21}\lambda_{23}\lambda_{24}(t_4 - t)(t_3 - t)(t_2 - t)} = \alpha_{22} \quad (10)$$

$p_{22}(t) = \alpha_{22}\lambda_{21}\lambda_{23}\lambda_{24}(t_4 - t)(t_3 - t)(t_2 - t) = p_2$ – друга ХФ.

За аналогією до записів p_1 та p_2 запишемо ХФ p_3 та p_4 :

$$\left. \begin{aligned} 3.1. \quad p_{31}(t) &= \lambda_{31}(t_1 - t); \\ 3.2. \quad p_{32}(t) &= p_{31}(t) \cdot \lambda_{32}(t_2 - t) = \lambda_{32}\lambda_{31}(t_1 - t)(t_2 - t); \\ 3.3. \quad p_{34}(t) &= p_{32}(t)\lambda_{34}(t_4 - t) = \lambda_{34}\lambda_{32}\lambda_{31}(t_1 - t)(t_2 - t)(t_4 - t); \end{aligned} \right\} (11)$$

$$3.4. p_{33}(t) = f_{33}(t) \cdot p_{34}(t) \rightarrow f_{33}(t) = \frac{1}{\lambda_{34}\lambda_{32}\lambda_{31}(t_1-t)(t_2-t)(t_4-t)} = \alpha_{33}, \quad (12)$$

тоді $p_{33}(t) = \alpha_{33}\lambda_{34}\lambda_{32}\lambda_{31}(t_1-t)(t_2-t)(t_4-t) = p_3$ – третя ХФ.

$$\left. \begin{aligned} 4.1. p_{41}(t) &= \lambda_{41}(t_1-t); \\ 4.2. p_{42}(t) &= p_{41}(t) \cdot \lambda_{42}(t_2-t) = \lambda_{42}\lambda_{41}(t_1-t)(t_2-t); \\ 4.3. p_{43}(t) &= p_{42}(t)\lambda_{43}(t_3-t) = \lambda_{43}\lambda_{42}\lambda_{41}(t_1-t)(t_2-t)(t_3-t); \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$4.4. p_{44}(t) = f_{44}(t) \cdot p_{43}(t) \rightarrow f_{44}(t) = \frac{1}{\lambda_{43}\lambda_{42}\lambda_{41}(t_1-t)(t_2-t)(t_3-t)} = \alpha_{44}, \quad (14)$$

тоді $p_{44}(t) = \alpha_{44}\lambda_{43}\lambda_{42}\lambda_{41}(t_1-t)(t_2-t)(t_3-t) = p_4$ – четверта ХФ.

Знайдемо суму σ усіх елементів параметричної БН-матриці (1):

$$\sigma = \sum_{i=j=1}^{i=j=4} p_{ij}. \quad (15)$$

Знайдені ХФ p_1, p_2, p_3, p_4 поділимо на σ , дістанемо БН-координати p_{iB} для вихідної геометричної схеми (рис. 1):

$$p_{1B} = \frac{p_1}{\sigma}; p_{2B} = \frac{p_2}{\sigma}; p_{3B} = \frac{p_3}{\sigma}; p_{4B} = \frac{p_4}{\sigma}. \quad (16)$$

Враховуючи (16) точкове рівняння, що інтерполює вихідні точки A_1, A_2, A_3, A_4 , матиме вигляд:

$$M = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot p_{iB}. \quad (17)$$

Висновки. Наведено узагальнена техніка алгебраїчного формування характеристичних функцій та розрахунків БН-координат для чотирьох точок у площині, що дає можливість безпомилкового і швидкого знаходження інтерполянта у точковій формі. Це значно прискорює створення моделей для систем з використанням методу композиційного геометричного моделювання багатofакторних систем.

Література

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн – функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко – М.: Наука, 1980. – 352с.
2. Ибрагимов И.И. Методы интерполирования функций и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов – М.: Наука, 1971. – 520 с.
3. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція [Текст] / В.М. Найдиш – Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. – 250 с.
4. Ковальов С.М. Дискретна двовимірна інтерполяція з першим порядком гладкості стикування порцій / С.М. Ковальов, А.В. Золотова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип.87. – С.164-170.

5. Адоньев Є.О. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для трьох точок / Є.О. Адоньев, В.М. Верещага, К.Ю. Лисенко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016 р. – №50 (1222).
6. Адоньев Є.О. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для чотирьох точок / Є.О. Адоньев, В.М. Верещага, К.Ю. Лисенко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017р. – №16(1238).

БН-ИТЕРПОЛЯЦИЯ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК В ПЛОСКОСТИ

Лысенко К.Ю., Верещага В.М., Найдыш А.В.

В работе предоставляется обобщенная техника алгебраического образования характеристических функций для Б-фигур, предоставляется способ расчета БН-координат для интерполянта, что интерполирует заранее определенные полюса интерполяции. Разработана алгебраическая техника формирования Б-функций для четырех точек, в общем виде, то есть для всех возможных вариантов значений параметров от 0 до 1 для двух точек, находящихся внутри отрезка. В рамках точечного БН-исчисления достаточно часто применяют функции-параметры, которые названы авторами Б-функции, при определенных заранее значениях параметров, равны единице или нулю Б-функции, являются параметрами Б-кривых, представленных в точечной форме, и используются в создании моделей процессов или ситуаций. Применение предлагаемой техники алгебраического формирования Б-функций позволит создать класс Б-кривых, на основе которых будет выполняться моделирование многофакторных процессов. Приведена обобщенная техника алгебраического формирования характеристических функций и расчет БН-координат для четырех точек в плоскости, дает возможность безошибочного и быстрого нахождения интерполянта в точечной форме. Это значительно ускоряет создание моделей для систем с использованием метода композиционного геометрического моделирования многофакторных систем. Методы алгебраической нахождения интерполянта, в большинстве своем, требующих решения систем линейных уравнений, увеличение размеров которых повышает погрешность расчетов. БН-

интерполяция лишена этого недостатка. Однако, нахождение БН-интерполянта, степень которого больше 3, вызывает определенные трудности. Предложенная в данной статье обобщена техника алгебраического образования характеристических функций значительно упрощает нахождение БН-интерполянта степени > 3 .

Ключевые слова: Б-кривые, Б-функции, БН интерполяция, БН координаты, Б-фигуры, техника формирования, точечное исчисление Балубы-Найдыша (БН-исчисление).

BN-INTERPOLATION OF THE FOUR POINTS IN THE PLANE

Lysenko K., Vereshchaga V., Naidysh A.

In this paper a generalized technique of algebraic formation of characteristic functions for B-figures is provided, and a method for calculating BN coordinates for an interpolator interpolating predetermined poles of interpolation is provided. An algebraic technique for the formation of B-functions for four points, in the general form, that is, for all possible variants of the values of parameters from 0 to 1 for two points located inside the segment, has been developed. In the framework of the point BN-calculus, the functions-parameters that are called by the authors of the B-function are often used, which, with predetermined values of parameters, equal to or equal to zero B-functions, are parameters of the B curves, which are presented in the point form, and are used in created models of processes or situations. Application of the proposed technique of algebraic formation of B-functions will allow to create a class of B-curves, on the basis of which simulation of multifactorial processes will be performed. The generalized technique of algebraic formation of characteristic functions and the calculation of BN coordinates for four points in the plane are given, and it is possible to find the interpolator in a point form without fault and quickly. This greatly accelerates the creation of models for systems using the method of composite geometric modeling of multi-factor systems. Methods of algebraic finding of an interpolant, for the most part, require the solution of systems of linear equations, increasing the size of which increases the error of calculations. The BN interpolation is devoid of this defect. However, finding a BN-interpolant, the degree of which is greater than 3, causes some difficulties. The generalized technique of algebraic formation of characteristic functions proposed in this article greatly simplifies the finding of a BN-interpolant of degree > 3 .

Key words: B-curves, B-functions, BN-interpolation, BN-coordinates, B-shapes, technique of formation, point calculation Balyuba-Naidysh (BN-calculus).