

УДК 514.18

ФОРМУВАННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ СІТОК НА ОСНОВІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО СПЛАЙНУ

Аушева Н.М., д.т.н.,

Демчишин А.А., к.т.н.

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

(Україна)

При моделюванні гладких криволінійних обводів виникають питання знаходження похідних, що можуть формуватися на основі додаткової інформації користувача. Якщо такої інформації не існує, тоді застосовуються додаткові чисельні методи для розрахунку. Для позбавлення від додаткових розрахунків доцільно застосовувати фундаментальні сплайни, які спираються тільки на інформацію про точковий каркас.

При роботі з кривими нульової довжини, які дозволяють формувати ортогональні сітки на площині, необхідно провести додаткові дослідження стосовно збереження цієї умови для різних значень заміни параметру.

Автор роботи пропонує спосіб конструювання плоских ортогональних сіток на основі плоского ізотропного фундаментального сплайну. Наводяться умови для створення тривимірного фундаментального сплайну. При формуванні плоского ізотропного сплайну застосовується умова ізотропності хорд, що стягують точковий каркас та надається твердження. Для формування ортогональної сітки пропонується застосовувати квазіконформну заміну параметра. Заміна параметра виконується на основі комбінації визначених функцій $f_1(u)$, $f_2(v)$ - де u та v - деякі дійсні параметри. Функції повинні формуватися на основі різних параметрів. Наводиться твердження стосовно формування ортогональної сітки на основі ізотропного сплайну при запропонованій заміні параметра. Для доведення достовірності запропонованих положень даються приклади змодельованих сіток та виконується розрахунок коефіцієнта першої квадратичної форми F , аналіз значення якого дозволяє зробити певні припущення. Подальші дослідження пов'язані з побудовою мінімальних поверхонь на основі запропонованої квазіконформної заміни.

Ключові слова: ізотропна крива, фундаментальний сплайн, ортогональна сітка, ізотермічна сітка, квазіконформна заміна параметру.

Постановка проблеми. Формування сіток на площині за заданими властивостями дозволяє застосовувати їх для визначення поверхонь зі спрощеними виразами першої та другої квадратичних форм. Для моделювання таких сіток можна застосувати ізотропні криві. В залежності від заданих умов та для створення інтерактивного режиму користувача доцільно використовувати криві Безьє та дробово-раціональні криві, але в цьому випадку необхідно виконувати додаткові розрахунки дотичних та обчислювати ваги точок характеристичних многокутників [1,2]. Для позбавлення від цих проблем доцільно застосовувати ізотропні фундаментальні сплайни, що спираються тільки на точковий каркас [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблематика побудови сіток досліджувалась у багатьох роботах. Найчастіше розглядалися задачі з ізометричними сітками. В роботах [1-2] проводиться моделювання сіток на основі кривих Безьє та дробово-раціональних кривих. У статті [4] надається короткий огляд моделювання ізометричних сіток за дискретним каркасом на основі кривих Безьє, дробово-раціональних кривих, полінома Лагранжа та на основі метода найменших квадратів. Автором роботи [5] запропоновано спосіб побудови плоскої ізометричної сітки за довільною плоскою кривою, заданою параметричним рівнянням. Утворення плоских ортогональних сіток різними способами пропонується автором дисертаційного дослідження [6]. У дослідженнях [7, 8] надається спосіб формування ізотропної кривої Безьє п'ятого порядку та дробово-раціональних кривих, які застосовуються для побудови мінімальних поверхонь.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є розробка способу конструювання плоских ортогональних сіток на основі квазіконформної заміни параметра та фундаментального сплайну. Використання фундаментального сплайну дозволить формувати сітку спираючись тільки на точковий каркас без додаткових обчислень.

Основна частина. Розглянемо формування плоских сіток на основі фундаментального сплайну у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & [(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_{j-1})(t^3 - 2t^2 + t) + (\mathbf{r}_{j+2} - \mathbf{r}_j)(t^3 - t^2)]s + \\ & + [\mathbf{r}_j(2t^3 - 3t^2 + 1) + \mathbf{r}_{j+1}(-2t^3 + 3t^2)], \end{aligned} \quad (1)$$

де \mathbf{r}_{j-1} , \mathbf{r}_j , \mathbf{r}_{j+1} , \mathbf{r}_{j+2} - точки заданого точкового каркасу, $j=1..n-2$, $s=(1-k)/2$, k - параметр натягу сплайну. Якщо $k=0$, маємо різновид фундаментального сплайну, а саме сплайн Катмалл-Рома.

Умовами для ізотропності просторового фундаментального сплайну будуть вирази [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})^2 = 0, \\ \sum_{r=x,y,z} (r_{j+2} - r_j)^2 = 0, \\ -s \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+2} - r_j) + 3 \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+1} - r_j) = 0, \\ \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+1} - r_j) = \sum_{r=x,y,z} (r_{j+2} - r_j)(r_{j+1} - r_j), \\ 2 \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_j)^2 - s \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+1} - r_j) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Для формування плоского ізотропного фундаментального сплайну скористаємося умовами ізотропності хорд, що стягують точки точкового каркасу: $\sum_{r=x,y} (r_{j+1} - r_j)^2 = 0$. Після підстановки цього виразу до умов (2) одержимо тотожні залежності. Сформулюємо твердження.

Твердження 1. Фундаментальний сплайн на площині буде ізотропним за умови ізотропності хорд, що стягують точковий каркас.

Для формування сіток виконаємо заміну параметра у рівнянні сплайну. Пропонується виконувати квазіконформну заміну параметра:

$$t = f_1(u) + if_2(v), \quad (3)$$

де $f_1(u)$, $f_2(v)$ - деякі функції.

Сформулюємо твердження.

Твердження 2. При квазіконформній заміні параметра (3) у рівнянні фундаментального ізотропного сплайну на площині формуються ортогональні сітки.

Покажемо на прикладі справедливість твердження.

Приклад. Побудуємо сітку на основі ізотропного фундаментального сплайну, якщо задані такі значення $x_{(j-1)Re} = 1.0$, $x_{jRe} = 3.0$, $x_{(j+1)Re} = 6.0$, $x_{(j+2)Re} = 8.0$, $y_{(j-1)Re} = 0.0$, $y_{jRe} = 1.0$, $y_{(j+1)Re} = 2.0$, $y_{(j+2)Re} = 3.0$, $x_{(j-1)Im} = 2.0$, $y_{(j-1)Im} = 3.0$. Невідомі уявні складові точок будемо знаходити на основі виразу $\sum_{r=x,y} (r_{j+1} - r_j)^2 = 0$.

Одержимо: $x_{jIm} = 1.0$, $y_{jIm} = 5.0$, $x_{(j+1)Im} = 0.0$, $y_{(j+1)Im} = 8.0$, $x_{(j+2)Im} = -1.0$, $y_{(j+2)Im} = 10.0$.

Побудуємо сітку на основі конформної заміни параметра $t = u + iv$ з різними значеннями натягу сплайну. В цьому випадку будемо одержувати ізотермічні сітки (рис.1). Ізотермічність сітки доводиться розрахунком коефіцієнтів першої квадратичної форми $F=0$ та $E = G$.

Якщо параметр натягу сплайну залежить від змінної, тоді сітка лишається властивостей ізотермічності (рис.1,з).

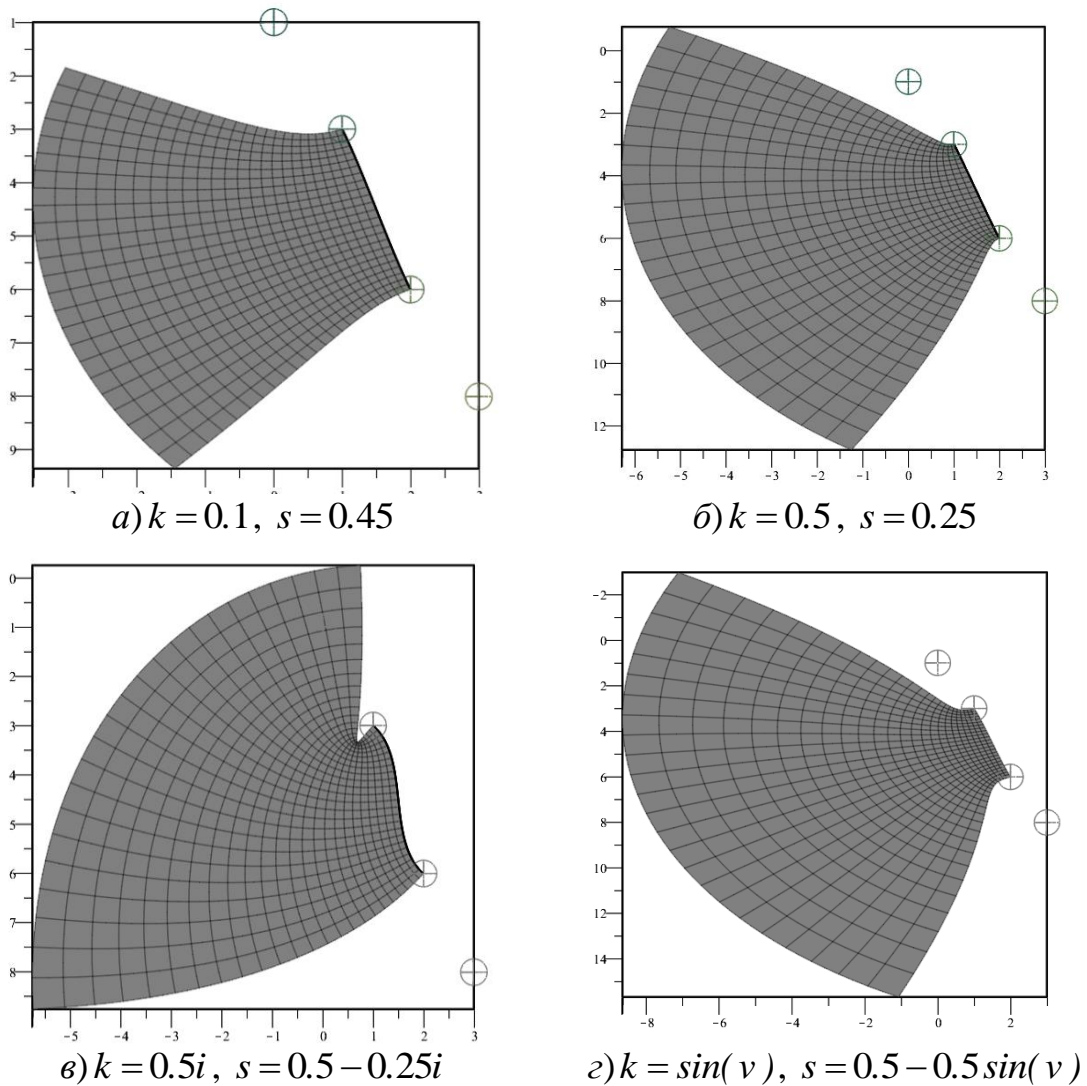
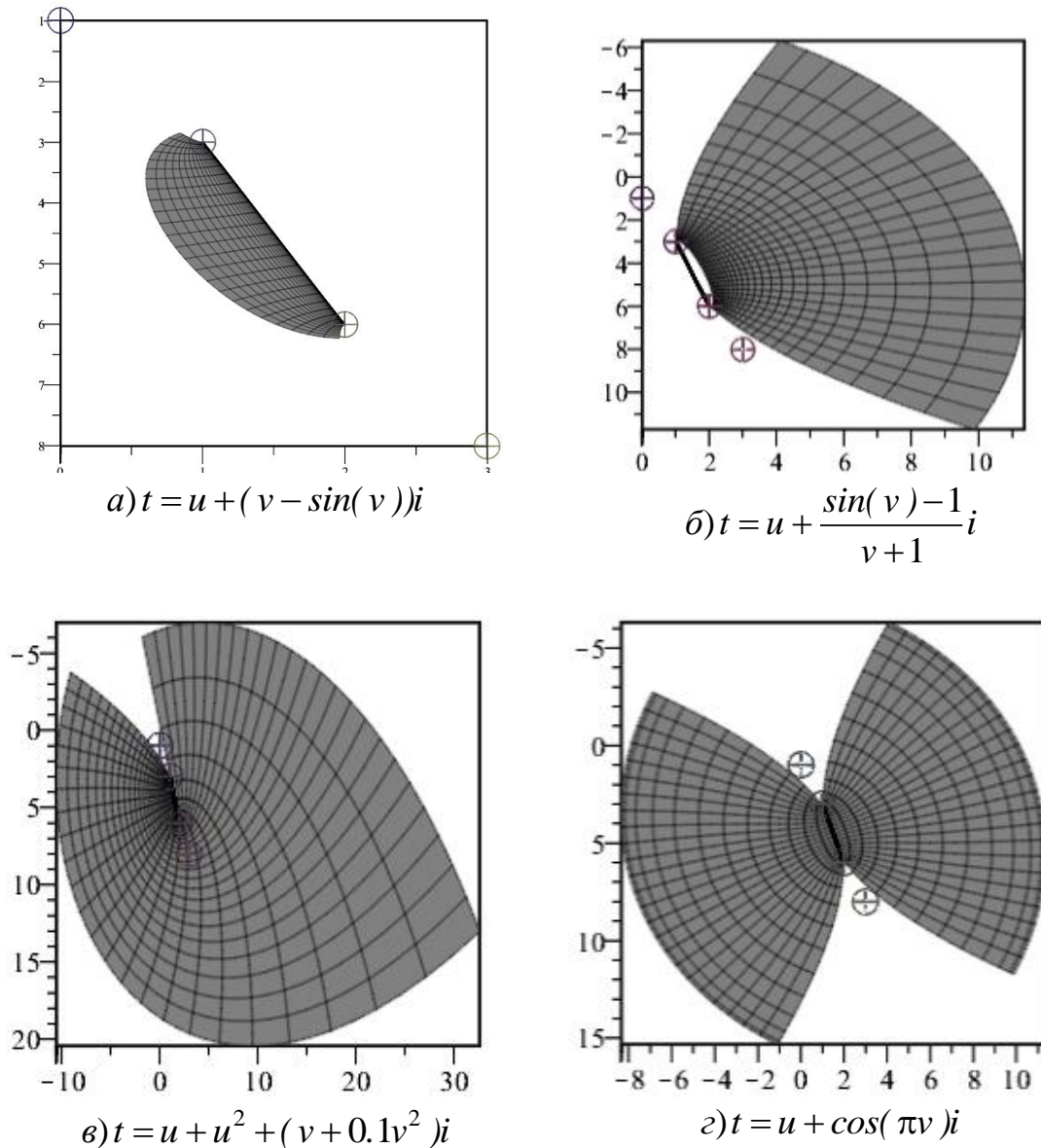


Рис.1. Сітка при різних значення натягу сплайну

Тепер дослідимо зміни сітки в залежності від заданих функцій заміни параметра на основі виразу (3) для параметру натягу $k = 0.8, s = 0.1$. Побудовані сітки відображено на рис.2. Для всіх варіантів коефіцієнт першої квадратичної форми $F=0$, тобто сітка буде ортогональною.

Висновки. В роботі показано, що спосіб моделювання сіток на основі ізотропних фундаментальних сплайнів дає можливість формування ортогональних сіток за умови квазікомфорної заміни параметра. Показано, що сітки зберігають ортогональність, якщо дійсна та уявна частини при квазікомфорній заміні параметра залежать тільки від однієї змінної.

Рис.2. Сітка при різних значення заміни параметру t

Література

1. Аушева Н.М., Демчишин А.А. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих. *Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка*. КНУБА, 2013. Вип. 91. С.2-7.
2. Аушева Н.М. Моделювання плоских сіток на основі дробово-раціональних ізотропних кривих. *Журнал «Технологічний аудит та резерви виробництва»: Наукові підсумки*, 2013. Т.6, №4(14). С.41-43.
3. Аушева Н. М. Ізотропні фундаментальні сплайни. *Збірник наукових праць. Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2016. Вип. 6. С.3-7.

4. Аушева Н. М., Несвідоміна О.В. Плоскі ізометричні сітки за дискретним рядом точок. *Збірник наукових праць. Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2017. Вип.10. С.22-26.
5. Несвідоміна О.В. Побудова плоских ізометричних сіток за наперед заданими плоскими кривими. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2017. Вип. 3(62). Т. 2. С. 298-302.
6. Дзюба В.В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Київ, 2008. 21 с.
7. Ausheva N, Olevskiy V., Olevska Y. Modeling of Minimal Surface Based on an Isotropic Bezier Curve of Fifth Order. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics (JGSP)*. Bulgarian Academy of Sciences, 2019 Volume 52 (2019). P.1-15.
8. Andrianov I.V., Ausheva N.M., Olevska Y.B., Olevskiy V.I. Surfaces Modelling Using Isotropic Fractional-Rational Curves. *Journal of Applied Mathematics*. by Hindawi, 2019. Vol. 2019, Article ID 5072676, 13 p.

ФОРМИРОВАНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТОК НА ОСНОВЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Аушева Н.Н., Демчишин А.А.

При моделировании гладких криволинейных обводов возникают вопросы нахождения производных, которые могут формироваться на основе дополнительной информации от пользователя. Если такой информации не существует, тогда используются дополнительные численные вычисления. Для избавления от дополнительных расчетов целесообразно применять фундаментальные сплайны, которые опираются только на информацию о точечном каркасе. При работе с кривыми нулевой длины, которые позволяют формировать ортогональные сетки на плоскости, необходимо провести дополнительные исследования по сохранению этого условия для различных значений замены параметра.

Автор работы предлагает способ конструирования ортогональных сеток на основе плоского изотропного фундаментального сплайна. Приводятся условия для создания трехмерного фундаментального сплайна. При формировании плоского изотропного сплайна применяется условие изотропности хорд, которые стягивают точечный каркас и формулируется утверждение. Для формирования ортогональной сетки предлагается применять квазиконформную замену параметра. Замена параметра выполняется на основе комбинации определенных функций $f_1(u)$, $f_2(v)$ -

где u, v - некоторые действительные параметры. Функции должны формироваться на основе различных параметров. Сформулировано утверждение для формирования ортогональной сетки на основе изотропного сплайна при предложенной замене параметра. Для доказательства достоверности предложенных положений приводятся примеры смоделированных сеток и выполняется расчет коэффициента первой квадратичной формы F , анализ значения которого позволяет сделать определенные предположения. Дальнейшие исследования связаны с построением минимальных поверхностей на основе предложенной квазиконформной замены.

Ключевые слова: изотропная кривая, фундаментальный сплайн, ортогональная сетка, изотермическая сетка, квазиконформная замена параметра.

FORMATION OF ORTHOGONAL GRIDS ON THE BASIS OF FUNDAMENTAL SPLINES

Ausheva N., Demchyshyn A.

To model smooth curved contours the questions are raised about finding derivatives that can be formed based on user additional information. If such information does not exist, then additional numerical methods are used for calculation. To avoid extra calculations, it is relevant to use fundamental splines which are based only on the point frame information. To work with zero-length curves that allows the formation of orthogonal grids on a plane, additional research is needed in order to save this condition for different values of parameter replacement.

The author proposes a method of constructing flat orthogonal grids based on a flat isotropic fundamental spline. The conditions for creating a three-dimensional fundamental spline are given. To form a flat isotropic spline, the condition of isotropic chords is used, which subtend the point frame and forms the statement. It is proposed to use a quasi-conformal parameter change to form an orthogonal grid. The parameter is replaced by a combination of the defined functions $f_1(u), f_2(v)$ - where u and v are some valid parameters. The functions must be formed on the basis of different parameters. The statement is given regarding the formation of an orthogonal grid based on an isotropic spline with the proposed parameter replacement. To prove the validity of the proposed states, examples of simulated grids are given and the coefficient of the first quadratic form F is calculated, the analysis of which allows us to make certain assumptions. Further studies are related to the construction of minimal surfaces based on the proposed quasi-conformal replacement.

Keywords: isotropic curve, fundamental spline, orthogonal grid, isothermal grid, quasiconformal parameter replacement.