

УДК 514.18

ЗГИНАННЯ ОДНОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ ЗМІНОЮ РАДІУСА ГОРЛОВОЇ ЛІНІЇ

Кресан Т.А., к.т.н.,*

Пилипака С.Ф., д.т.н.,

Несвідомін А.В., к.т.н.,

Бабка В.М., к.т.н.,

Кремець Я.С., к.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування
України (м. Київ, Україна)*

Згинання поверхонь є одним із важливих розділів диференціальної геометрії. В ньому розглядається згинання як розгортних поверхонь, так і нерозгортних. Для розгортних поверхонь (торсів) практична сторона задачі полягає в знаходженні розгортки заданого відсіку поверхні. Прикладне значення такої задачі очевидне, оскільки дозволяє знаходити контури плоскої заготовки для подальшого згинання її в готовий виріб. Для нерозгортних поверхонь не існує поняття розгортки, однак математичний опис проміжних положень поверхні при її згинанні відбувається так як і для розгортної. В основі цього опису використовуються загальні підходи, суть яких полягає в незмінності довжин ліній та кутів між ними на поверхні при її згинанні. Це забезпечується незмінною першою квадратичною формою поверхні при її згинанні.

В статті розглянуто згинання однопорожнинного гіперboloїда обертання в іншу поверхню обертання. Складено рівняння однопараметричної множини проміжних положень поверхні при її згинанні. До них входить стала величина, так званий параметр згинання. Конкретному параметру згинання відповідає певна поверхня із однопараметричної множини. Цей параметр не входить до виразу першої квадратичної форми, яка для множини всіх поверхонь залишається спільною. Це свідчить про достовірність отриманих рівнянь, що описують згинання поверхні.

При згинанні однопорожнинного гіперboloїда обертання меридіан поверхні, яким є гіпербола, трансформується у іншу плоску криву. Прямолінійна твірна вихідної поверхні трансформується у просторову криву на зігнутий поверхні. В статті розглянута можливість кочення зігнутої поверхні по вихідній. Для цього обидві

* Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

поверхні потрібно розташувати таким чином, щоб прямолінійна твірна вихідної поверхні дотикалась у відповідній точці до лінії, трансформованої у криву на зігнутій поверхні і щоб дотична у точці дотику до кривої збігалася із прямолінійною твірною. Кочення поверхонь одна по одній відбувається при точеному контакті. При коченні зігнутої поверхні по нерухомій вихідній (або навпаки) точка контакту буде рухатися по цих лініях, проходячи однаковий шлях по прямій і кривій лініях.

Ключові слова: *однопорожнинний гіперболоїд обертання, згинання, трансформація прямолінійної твірної, кочення поверхонь, перша квадратична форма.*

Постановка проблеми. Згинанню розгортних поверхонь присвячено багато праць. Це зумовлено практичною значимістю даного напрямку досліджень [1]. Останнім часом гнуті вироби із металевого листового матеріалу, зокрема, різного роду трубопроводи, витісняють більш довговічні пластмасові вироби. Однак це не зменшує актуальності досліджень в області згинання розгортних поверхонь. Якщо згинання плоскої заготовки в криволінійну поверхню на побутовому рівні сприймається як очевидний факт, то математичний опис такого згинання ґрунтується на теорії згинання поверхонь із застосуванням апарату диференціальної геометрії. Згинання нерозгортних поверхонь не є очевидним фактом, який можна продемонструвати на побутовому рівні, але тим не менше таке згинання існує і воно має практичне застосування. Зокрема, воно стосується обкочування поверхонь по своєму згинанню, що може бути використане при проектуванні зубчастих зачеплень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичні основи згинання нерозгортних поверхонь висвітлено в монографії [2]. Досить добре вивчено питання згинання гвинтових поверхонь. Згідно теореми Бура всяку гвинтову поверхню можна зігнути на поверхню обертання. На основі цієї теореми в працях [3, 4] здійснено неперервне згинання відомих гвинтових поверхонь. В працях [5, 6] теж йдеться про згинання гвинтових поверхонь. В праці [7] розглянуто згинання поверхонь переносу. Окремим напрямком досліджень є апроксимація нерозгортних поверхонь смугами торсів і побудова розгорток цих смуг, що можна розглядати, як згинання торса на площину. Цій тематиці присвячена праця [8].

Формулювання цілей статті. Здійснити згинання однопорожнинного гіперболоїда обертання зміною радіуса його горлової лінії та дослідити можливість кочення отриманих поверхонь одна по одній.

Основна частина. Однопорожнинний гіперболоїд обертання

можна отримати обертанням прямолінійної твірної навколо мимобіжної вертикальної осі. Якщо ця твірна буде паралельна до осі обертання, то утвореною поверхнею буде циліндр, якщо ні, то утвореною поверхнею буде однопорожнинний гіперболоїд обертання. Виходячи із цього способу утворення, запишемо параметричні рівняння гіперболоїда:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \alpha - u \cos \beta \sin \alpha; \\ Y &= r \sin \alpha + u \cos \beta \cos \alpha; \\ Z &= u \sin \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

де α – кут повороту точки поверхні навколо осі OZ , u – довжина прямолінійної твірної – незалежні змінні поверхні; r – радіус найменшої паралелі (горлової лінії), β – кут нахилу прямолінійних твірних поверхні до горизонтальної площини – сталі величини.

Відсік поверхні, побудований за рівняннями (1), зображено на рис. 1,а.

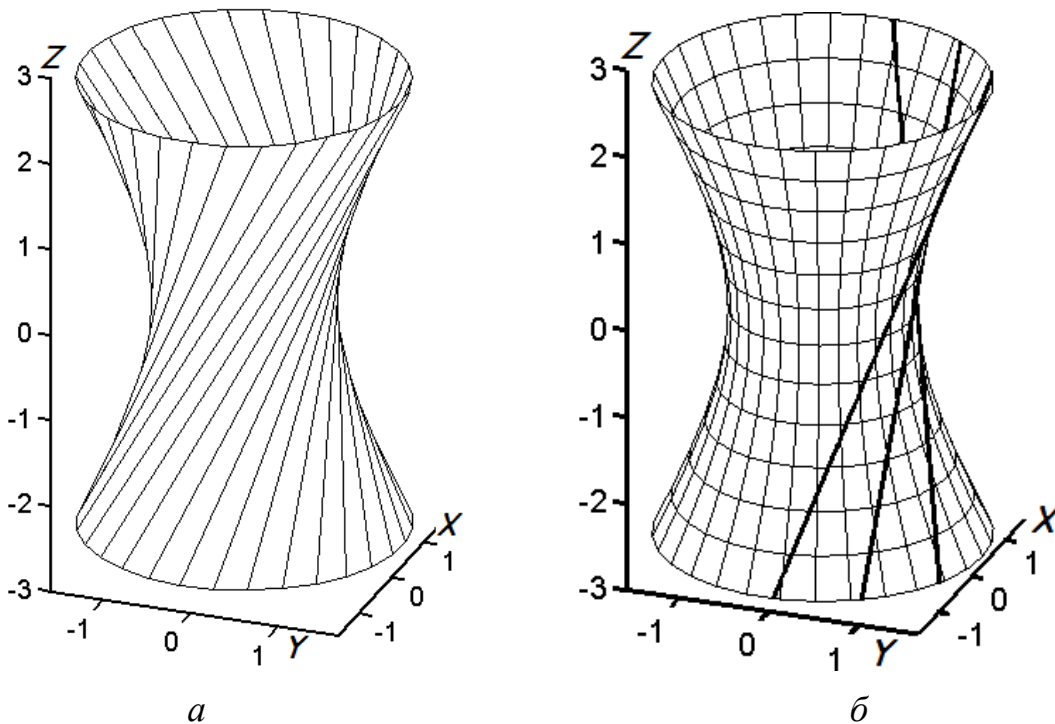


Рис. 1. Відсік однопорожнинного гіперболоїда обертання, побудованого при $r=1$ і $\beta=60^\circ$:

- а) однією сім'єю координатних ліній є сім'я прямолінійних твірних, іншою – паралелі (кола);
 б) однією сім'єю координатних ліній є меридіани (гіперболи), іншою – паралелі (кола)

Для згинання поверхні обертання зручно мати її параметричні рівняння, згідно яких поверхня буде віднесена до ортогональної сітки координатних ліній із сім'ї паралелей і меридіанів. Щоб знайти

рівняння меридіана поверхні (1), потрібно знайти криву її перерізу площиною, що проходить через вісь обертання. Переріжемо її, наприклад, площиною OYZ , тобто при $X=0$. Прирівняємо перше рівняння (1) до нуля:

$$r \cos \alpha - u \cos \beta \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Знайдемо взаємозв'язок між змінними u і α , який у внутрішніх криволінійних координатах поверхні задає на ній меридіан (гіперболу). Розв'язавши (1) відносно α , отримаємо:

$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}}; \quad \cos \alpha = \frac{u \cos \beta}{\sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}}. \quad (3)$$

Підставимо (3) в друге рівняння (1) і одержимо:

$$Y = \sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}. \quad (4)$$

У виразі (4) замість « Y » введемо позначення « ρ » – відстань від осі обертання OZ до точки на гіперболі. Приєднавши до (4) третє рівняння із (1), отримаємо параметричні рівняння меридіана:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}; \\ z &= u \sin \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо меридіан заданий параметричними рівняннями $\rho=\rho(u)$ і $z=z(u)$, то поверхня обертання опишеться наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \alpha; \\ Y &= \rho \sin \alpha; \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (6)$$

На рис. 1,б побудовано гіперболоїд за рівняннями (6) із врахуванням (5) і зображені окремі прямолінійні твірні на його поверхні.

Відомо, що при згинанні поверхонь їхня перша квадратична форма не змінюється. Для знаходження коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні (1) визначаємо її частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \rho' \cos \alpha; & \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= -\rho \sin \alpha; \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \rho' \sin \alpha; & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= \rho \cos \alpha; \\ \frac{\partial Z}{\partial u} &= z'; & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned}
G &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = \rho'^2 + z'; \\
F &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 0; \\
E &= \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} \right)^2 = \rho^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Будемо згинати поверхню (6), змінюючи радіуси паралелей множенням їх на сталу величину p , але при цьому їх довжина не повинна змінюватися. Довжина дуги кола до згинання визначається із відомої формули: $s = \rho\alpha$. Після згинання із врахуванням нового радіуса $\rho_3 = p\rho$ і нового кута α_3 вона запишеться: $s_3 = p\rho\alpha_3$. Прирівнюючи $s = s_3$, тобто $\rho\alpha = p\rho\alpha_3$, знаходимо: $\alpha_3 = \alpha/p$. Перепишемо параметричні рівняння (6) із врахуванням згинання, залежного від параметра p :

$$\begin{aligned}
X &= p\rho \cos(\alpha/p); \\
Y &= p\rho \sin(\alpha/p); \\
Z &= z_3.
\end{aligned} \tag{9}$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми для поверхні (9) за аналогією, як ми це робили для поверхні (6). Наводимо готовий результат:

$$G = p^2 \rho'^2 + z_3'; \quad F = 0; \quad E = \rho^2. \tag{10}$$

Порівнюючи коефіцієнти (10) після згинання і коефіцієнти (8) до згинання, бачимо, що існує невідповідність у коефіцієнті G . Прирівняємо їх вирази до і після згинання:

$$\rho'^2 + z' = p^2 \rho'^2 + z_3', \text{ звідки } z_3 = \int \sqrt{z'^2 + \rho'^2(1-p^2)} du. \tag{11}$$

Параметричні рівняння згинання поверхні (9) стають визначеними, коли стає відомою залежність (11) $z_3 = z_3(u)$. До неї входять дві похідні функції згідно рівнянь (5):

$$\rho' = \frac{u \cos^2 \beta}{\sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}}, \quad z' = \sin \beta. \tag{12}$$

Під час згинання поверхні меридіан, яким є гіпербола, трансформується в іншу криву, яка описується наступними параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}
\rho_3 &= p\sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}; \\
z_3 &= \int \sqrt{\sin^2 \beta + \frac{u^2 \cos^4 \beta(1-p^2)}{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}} du.
\end{aligned} \tag{13}$$

При $p=1$ рівняння (13) описують вихідну криву – меридіан, а

рівняння (9) – вихідну поверхню – однопорожнинний гіперболоїд обертання.

На рис. 2,а чисельними методами побудовано меридіани для різних значень сталої p , а на рис. 2,б – деякі поверхні обертання – згинання катеноїда. Слід мати на увазі, що для згинання поверхню слід розрізати вздовж меридіана і «скручувати» ($p < 1$) або «розкручувати» ($p > 1$). В таких випадках частина поверхні буде накладена одна на одну, або ж незамкненою на кут $2\pi(1-p)/p$. Якщо для поверхні (9) знайти коефіцієнти першої квадратичної форми, то вони будуть повністю збігатися із коефіцієнтами (8), що свідчить про достовірність математичного опису процесу згинання.

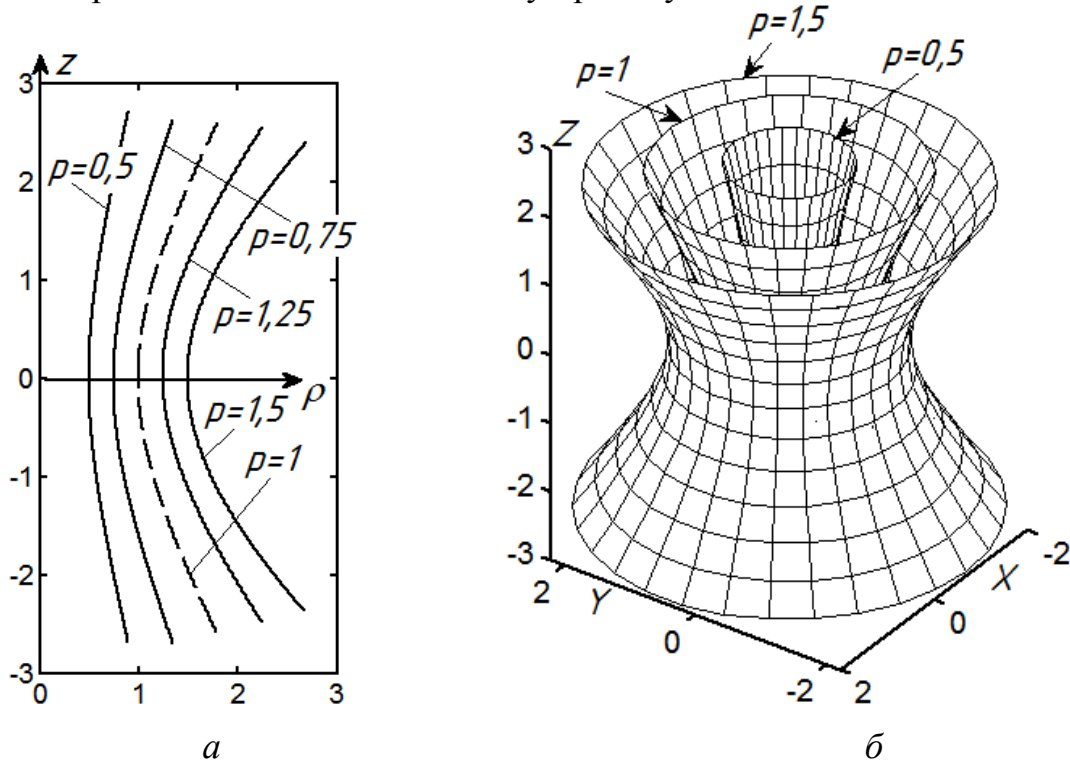


Рис. 2. Графічні ілюстрації до згинання однопорожнинного гіперболоїда обертання, побудованого при $r=1$ і $\beta=60^\circ$:
 а) форма меридіана в залежності від значення p ;
 б) однопорожнинний гіперболоїд обертання та його згинання

При згинанні поверхні довжина ліній і кутів між ними не змінюється. Вихідну і зігнуту поверхні ще називають накладаннями, оскільки кожній точці однієї поверхні однозначно ставиться у відповідність точка другої поверхні. Якщо сукупність точок утворює лінію на вихідній поверхні, то лінія такої ж довжини буде на зігнутій поверхні. Знайдемо лінію, у яку на зігнутій поверхні перетворюється прямолінійна твірна однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Якщо лінія на поверхні описана рівнянням у внутрішніх координатах, то при згинанні поверхні це рівняння не змінюється.

Знайдемо внутрішнє рівняння прямолінійної твірної на поверхні гіперboloїда. Вона проходить через горлову лінію – коло радіуса r . В перше рівняння (6) замість X підставимо r : $r = \rho \cdot \cos \alpha$. Далі в це рівняння підставляємо вираз для ρ із (5) і розв'язуємо відносно α . Отримаємо внутрішнє рівняння прямолінійної твірної:

$$\alpha = \operatorname{Arctg} \frac{u \cos \beta}{r}. \quad (14)$$

Підставимо (14) у параметричні рівняння (9), які описують зігнуту поверхню в залежності від значення сталої p і отримаємо координатний запис лінії, в яку трансформується прямолінійна твірна при згинанні однопорожнинного гіперboloїда обертання:

$$\begin{aligned} x &= p \sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta} \cos \left(\frac{1}{p} \operatorname{Arctg} \frac{u \cos \beta}{r} \right); \\ y &= p \sqrt{r^2 + u^2 \cos^2 \beta} \sin \left(\frac{1}{p} \operatorname{Arctg} \frac{u \cos \beta}{r} \right); \\ z &= \int \sqrt{\sin^2 \beta + \frac{u^2 \cos^4 \beta (1 - p^2)}{r^2 + u^2 \cos^2 \beta}} du. \end{aligned} \quad (15)$$

При $p=1$ рівняння (15) описують пряму лінію – прямолінійну твірну гіперboloїда. На рис. 3 за рівняннями (15) побудовано лінії на гіперboloїді і на його згинанні.

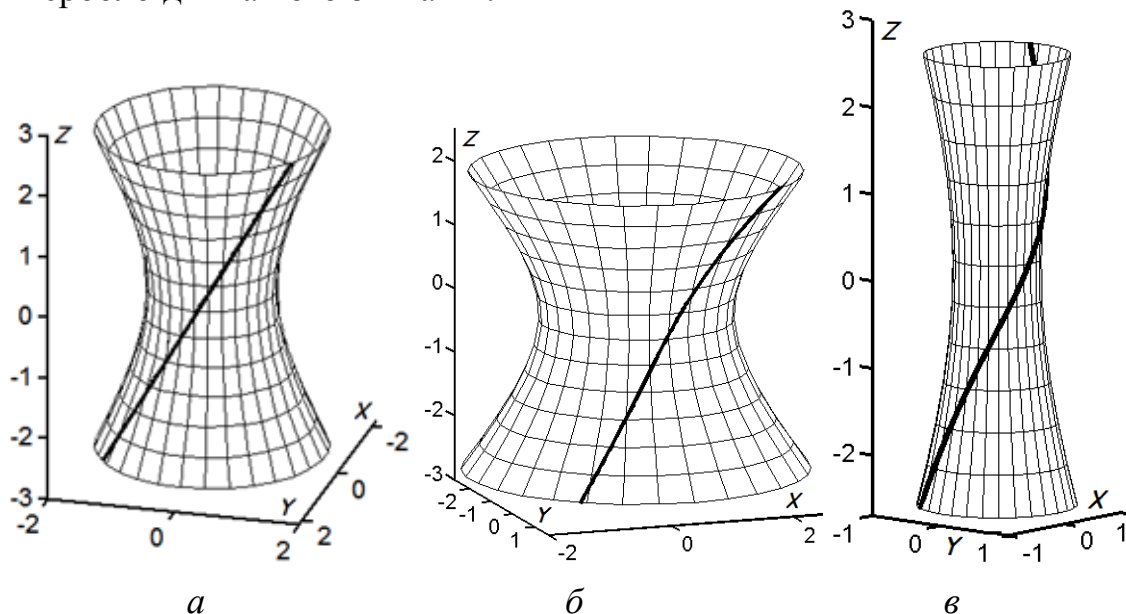


Рис. 3. Трансформація прямолінійної твірної у криву при згинанні однопорожнинного гіперboloїда обертання:

- а) $p=1$ (вихідна поверхня);
- б) $p=1,5$ (поверхню зігнуто «розкручуванням»);
- в) $p=0,5$ (поверхню зігнуто «скручуванням»)

В класичній праці [9] вказується на те, що поверхня може котитися по своєму згинанню. В загальному випадку таке кочення має два ступені свободи, коли контакт поверхонь відбувається в точці. При згинанні лінійчатих поверхонь їх контакт відбувається вздовж прямолінійних твірних (приклад – кочення конуса по конусу при суміщених вершинах). В цьому випадку є лише одна ступінь свободи. В нас випадок особливий: вихідна поверхня є лінійчатою, а після згинання перестає бути такою. Щоб почати кочення зігнутої поверхні по вихідній, потрібно сумістити їх таким чином, щоб прямолінійна твірна вихідної поверхні дотикалась до лінії, трансформованої у криву на зігнутій поверхні (наприклад, на горловій лінії) і щоб дотична у точці дотику збігалася із прямолінійною прямою. При коченні зігнутої поверхні по нерухомій вихідній (або навпаки) точка контакту буде рухатися по цих лініях, проходячи однаковий шлях по прямій і кривій лініях. Навіть при незначному згинанні прямолінійна твірна вихідної поверхні теоретично перетворюється у криву на зігнутій, отже при їх коченні відбувається точковий контакт, який рухається по спільних лініях дотику. Якщо ж стала $p=1$, то зігнута поверхня або повністю збігатиметься із вихідною (при внутрішньому коченні), або ж матиме спільну лінію дотику вздовж прямолінійних твірних. В такому випадку кожна точка дотику цих твірних буде рухатися по них. Отже, виникає ковзання вздовж спільної прямої лінії дотику. Цей факт відомий і враховується при проектуванні гіперболоїдних зубчастих зачеплень. В нашій інтерпретації він ґрунтується на коченні поверхні по своєму згинанню при граничному переході зігнутої поверхні у вихідну.

Висновки. При згинанні однопорожнинного гіперболоїда обертання його «скручуванням» або «розкручуванням» навколо осі меридіан поверхні, яким є гіпербола, трансформується у іншу плоску криву. Прямолінійна твірна вихідної поверхні трансформується у просторову криву на зігнутій поверхні. Кочення зігнутої поверхні по вихідній відбувається з точечним контактом двох ліній, причому дотична до кривої в точці контакту збігається із прямолінійною твірною вихідної поверхні. При коченні поверхонь одна по одній спільна точка контакту ліній (прямої і кривої) рухається по них, проходячи рівний шлях.

Література

1. Пилипака С.Ф. Проектирование трубопроводов из отсеков круговых конусов и цилиндров и автоматизированное построение разверток составных частей. *Прикл. геометрия и инж. графика*. К.: Будівельник, 1990. Вып. 49. С. 42 – 44.

2. Фиников С.П. Изгибание на главном основании. М.-Л.: ОНТИ, 1937. 176 с.
3. Пилипака С.Ф. Неперервне згинання косо́го гелікоїда в однопорожнинний гіперболоїд обертання. *Прикл. геометрія та інж. графіка*. К.: КДТУБА, 1996. Вип. 61. С. 140-144.
4. Пилипака С.Ф. Неперервне згинання катеноїда в гвинтовий коноїд. *Прикл. геометрія та інж. графіка*. К.: КДТУБА, 1998. Вип. 63. С. 80-83.
5. Мокрушина А.Т. Изгибание геликоидов. Прикладные задачи геометрических преобразований. Кишинев: Штиинца, 1977. С. 8 - 11.
6. Пилипака С.Ф. Згинання поверхні головних нормалей в поверхню нормалей на прикладі гвинтового коноїда. *Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования»*. Часть II. Мелитополь: ТГАТА, 1997. С. 126 - 128.
7. Григорьев В.А. Об изгибании поверхностей переноса. *Вопросы прикладной геометрии. Труды МАИ*. М., 1972. Вып. № 246. С. 105-109.
8. Ковалев С.Н., Панасюк Л.С. Аппроксимация каналовой поверхности непрерывной лентой торсов и ее развертка. *Реферат. информ. о законченных научно-исслед. работах в вузах Украинской ССР*. К.: Вища школа, 1977. Вып.1. С. 13.
9. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: Физматгиз, 1963. –540 с.

ИЗГИБАНИЕ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЕМ РАДИУСА ГОРЛОВОЙ ЛИНИИ

Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Несвидомин А.В.,
Бабка В.Н., Кремец Я.С.

Сгибание поверхностей является одним из важных разделов дифференциальной геометрии. В нем рассматривается сгибание как развертывающихся поверхностей, так и неразвертывающихся. Для развертывающихся поверхностей (торсов) практическая сторона задачи заключается в нахождении развертки заданного отсека поверхности. Прикладное значение такой задачи очевидно, поскольку позволяет находить очертание плоской заготовки для дальнейшего сгибания ее в готовое изделие. Для неразвертывающихся поверхностей не существует понятия развертки, однако математическое описание промежуточных положений поверхности при ее сгибании происходит как и для развертывающейся. В основе

этого описания используются общие подходы, суть которых заключается в неизменности длин линий и углов между ними на поверхности при ее сгибании. Это обеспечивается неизменной первой квадратичной формой поверхности при ее сгибании.

В статье рассмотрено сгибание однополостного гиперboloида вращения в другую поверхность вращения. Составлены уравнения однопараметрического множества промежуточных положений поверхности при ее сгибании. В них входит постоянная величина, так называемый параметр сгибания. Конкретному параметру сгибания соответствует определенная поверхность с однопараметрического множества. Этот параметр не входит в выражение первой квадратичной формы, которая для множества всех поверхностей остается общей. Это свидетельствует о достоверности полученных уравнений, описывающих сгибание поверхности.

При сгибании однополостного гиперboloида вращения меридиан поверхности, которым является гипербола, трансформируется в другую плоскую кривую. Прямолинейная образующая исходной поверхности трансформируется в пространственную кривую на согнутой поверхности. В статье рассмотрена возможность качения изогнутой поверхности по исходной. Для этого обе поверхности нужно расположить таким образом, чтобы прямолинейная образующая исходной поверхности соприкасалась в соответствующей точке с линией, трансформированной в кривую на согнутой поверхности, и чтобы касательная в точке соприкосновения кривой совпадала с прямолинейной образующей. Качения поверхностей одна по другой происходит при точечном контакте. При качении изогнутой поверхности по неподвижной исходной (или наоборот) точка контакта будет двигаться по этим линиям, проходя одинаковый путь по прямой и кривой линиям.

Ключевые слова: однополостный гиперboloид вращения, сгибание, трансформация прямолинейной образующей, качения поверхностей, первая квадратичная форма.

BENDING A SINGLE-CAVITY ROTATION HYPERBOLOID BY CHANGING THE NECK LINE RADIUS

Kresan T., Pylypaka S., Nesvidomin A., Babka V., Kremetz Ya.

Bending surfaces is one of the important sections of differential geometry. It examines the bending of both developable surfaces and non-developable ones. For developable surfaces (torsos), the practical side of

the task is to find a sweep of a given surface compartment. The applied value of such a task is obvious, because it allows you to find the shape of a flat workpiece for further bending it into a finished product. For non-developable surfaces there is no concept of a sweep, however, a mathematical description of the intermediate positions of the surface when it is bent occurs as for a developable one. The basis of this description uses general approaches, the essence of which is the constancy of the lengths of lines and the angles between them on the surface when it is bent. This is ensured by the invariable first quadratic shape of the surface when it is bent.

The article considers the bending of a one-cavity hyperboloid of rotation into another surface of rotation. The equations of a one-parameter set of intermediate positions of the surface during its bending are compiled. They include a constant value, the so-called bending parameter. A specific bending parameter corresponds to a specific surface with a one-parameter set. This parameter is not included in the expression of the first quadratic form, which remains common for the set of all surfaces. This indicates the reliability of the obtained equations describing surface bending.

When a single-cavity hyperboloid is bent, the meridian of the surface, which is a hyperbola, transforms into another plane curve. The rectilinear generatrix of the original surface is transformed into a spatial curve on a bent surface. The article considers the possibility of rolling a bended surface along the original one. To do this, both surfaces must be positioned so that the rectilinear generatrix of the original surface is in contact with the line transformed into a curve on the bent surface at the corresponding point, and that the tangent at the point of contact of the curve coincides with the rectilinear generatrix. The rolling of surfaces one after the other occurs with point contact. When a curved surface rolls along a fixed initial (or vice versa), the contact point will move along these lines, passing the same path along straight and curved lines.

Keywords: single-cavity rotation hyperboloid, bending, transformation of a rectilinear generatrix, rolling surfaces, first quadratic form.