УДК 514.18

УТВОРЕННЯ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ ТА МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ УЯВНОЇ ПЛОСКОЇ ЛІНІЇ ІЗ СТАЛОЮ КОМПЛЕКСНОЮ ВЕЛИЧИНОЮ КРИВИНИ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна),
Муквич М.М., к.т.н., [*]
Федорина Т.П., к. пед. н.,
Козаченко Н.В.,
Клюєва К.С.
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут» (Україна)

У даній статті здійснено аналітичний опис ізотропної лінії нульової довжини та мінімальних поверхонь засобами комплексного аналізу. Використано інтегральні залежності утворення параметричних рівнянь уявних ізотропних ліній, отримані із умови рівності нулю диференціала дуги просторової лінії. Параметричні рівняння ізотропних ліній знайдено за допомогою функцій $u(s)=\cos(a+bi)s;\ v(s)=\sin(a+bi)s,$ *де* $i-$ *уявна одиниця,* $a,b\in R$, *які задовольняють умову* $u^2+v^2=1.$ *Функції комплексної змінної* $u(s),v(s)$ *є похідними параметричних рівнянь від натурального параметра* s *уявної плоскої лінії із сталою комплексною величиною кривини* $k(s)=a+bi.$

Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу. Наведено вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми утворених мінімальних поверхонь.

Досліджено, що для вказаних функцій $u=u(s);\ v=v(s),$ *які задовольняють умову* $u^2+v^2=1,$ *можна знайти аналітичний опис двох різних просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які мають спільні властивості гауссової кривини поверхні. Показано, що мінімальні поверхні, побудовані на основі аналітичного опису ізотропної лінії за протилежних знаків виразів аплікат, є*

[*] Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

конгруентними.

Запропонована авторами статті методика неперервного геометричного моделювання ізотропних ліній засобами комплексного аналізу має переваги, зумовлені знаходженням параметричних рівнянь відповідних мінімальних поверхонь у вигляді елементарних функцій. Отриманий аналітичний опис мінімальних поверхонь дозволяє враховувати їх диференціальні характеристики для оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій.

Ключові слова: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, середня кривина поверхні, кривина плоскої лінії, функція комплексної змінної.

Постановка проблеми. Геометричні моделі, описані мінімальними поверхнями, мають переваги практичного змісту. Умова рівності нулю величини середньої кривини H мінімальної поверхні у всіх її точках є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні. Геометрична форма мінімальної поверхні забезпечує рівномірний розподіл зусиль при взаємодії оболонки з середовищем [1, с. 152]. Зокрема, створенню геометричної моделі викройки мембрани тентової конструкції, представленої у вигляді мінімальної поверхні на основі ізотропної кривої Без'є у якості управляючого елемента, присвячено роботу Н.М. Аушевої [2].

Задача знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь, починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), реалізується за допомогою методів комплексного аналізу [3, с. 685]. Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснюють у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для знаходження параметричних рівнянь мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти аналітичний опис ізотропних ліній нульової довжини. У роботі [4] авторів статті запропоновано аналітичні залежності утворення параметричних рівнянь ізотропних ліній. На основі тригонометричних [5] та гіперболічних [6] функцій отримано аналітичний опис ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь.

Формулювання цілей статті. Знайти аналітичний опис просторової ізотропної лінії за допомогою параметричних рівнянь від натурального параметра уявної плоскої лінії із сталою комплексною величиною кривини. Використовуючи аналітичний опис ізотропних ліній визначити параметричні рівняння відповідних мінімальних поверхонь.

Основна частина. У роботі [4] було запропоновано знаходити параметричні рівняння уявної ізотропної лінії на основі залежностей:

$$x(s)=\int\left(u-\frac{1}{2(u+v)}\right)ds;\, y(s)=\int\left(v-\frac{1}{2(u+v)}\right)ds;\, z(s)=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{u+v},\qquad (1)$$

де $i-$ уявна одиниця, функції $u(s), v(s)$ задовольняють рівність: $u^2+v^2=1.$

Параметричні рівняння у функціях довжини дуги s плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням $k=k(s)$, мають вигляд:

$$x(s)=x(0)+\int_0^s cos\left[\int_0^s k(s)ds\right]\cdot ds;\quad y(s)=y(0)+\int_0^s sin\left[\int_0^s k(s)ds\right]\cdot ds.\qquad (2)$$

Розглянемо уявну плоску криву із сталою комплексною величиною кривини $k(s)=a+bi,$ де $a\in R,\ b\in R,\ \ i-$ уявна одиниця.

Підставивши вираз $k(s)=a+bi$ у (2), отримаємо параметричні рівняння уявної плоскої лінії у функціях довжини дуги:

$$x(s)=x(0)+\int_0^s \cos[(a+bi)s]\cdot ds;\quad y(s)=y(0)+\int_0^s \sin[(a+bi)s]\cdot ds.\qquad (3)$$

Диференціюючи вирази (3), отримаємо функції комплексної змінної, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$:

$$u(s)=\frac{dx}{ds}=\cos[(a+bi)s];\quad v(s)=\frac{dy}{ds}=\sin[(a+bi)s].\qquad (4)$$

При підстановці виразів (4) у залежності (1) після інтегрування отримаємо параметричні рівняння уявної просторової ізотропної лінії:

$$x(s)=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Arth}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\sqrt[4]{-1}\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{s}{2}(a+bi)\right)-1\right)\right]+2\sin(a+bi)s}{2(a+bi)};$$

$$y(s)=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Arth}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\sqrt[4]{-1}\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{s}{2}(a+bi)\right)-1\right)\right]-2\cos(a+bi)s}{2(a+bi)};\qquad (5)$$

$$z(s)=\frac{\mathrm{Arth}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\sqrt[4]{-1}\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{s}{2}(a+bi)\right)-1\right)\right]}{a\cdot i-b}.$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у рівняннях (5) уведемо заміну: $s=u+i\cdot v.$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (5), отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$X(u,v)=\frac{b}{2\sqrt{2}\left(a^2+b^2\right)}\left(\operatorname{arctg} m-\operatorname{arctg} n\right)+\frac{a}{4\sqrt{2}\left(a^2+b^2\right)}\times$$
$$\times\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\right)^2+w\right)-\ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\right)^2+w\right)\right)+\frac{a\cdot \operatorname{ch}(bu+av)\sin(au-bv)}{a^2+b^2}+$$
$$+\frac{b\cdot \operatorname{sh}(bu+av)\cos(au-bv)}{a^2+b^2};$$
$$Y(u,v)=\frac{\sqrt{2}\,b}{4\left(a^2+b^2\right)}\left(\operatorname{arctg} m-\operatorname{arctg} n\right)+\frac{a}{4\sqrt{2}\left(a^2+b^2\right)}\times$$
$$\times\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\right)^2+w\right)-\ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\right)^2+w\right)\right)-\frac{4a\cdot \operatorname{ch}(bu+av)\cos(au-bv)}{a^2+b^2}+ \qquad (6)$$
$$+\frac{4b\cdot \operatorname{sh}(bu+av)\sin(au-bv)}{a^2+b^2};$$
$$Z(u,v)=\frac{a}{2\left(a^2+b^2\right)}\left(\operatorname{arctg} m-\operatorname{arctg} n\right)-\frac{b}{4\left(a^2+b^2\right)}\times$$
$$\times\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\right)^2+w\right)+\ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\right)^2+w\right)\right).$$

У параметричних рівняннях (6) функції $m(u;\,v)$, $n(u;\,v)$, $j(u;\,v)$, $w(u;\,v)$ визначаються із наступних рівностей:

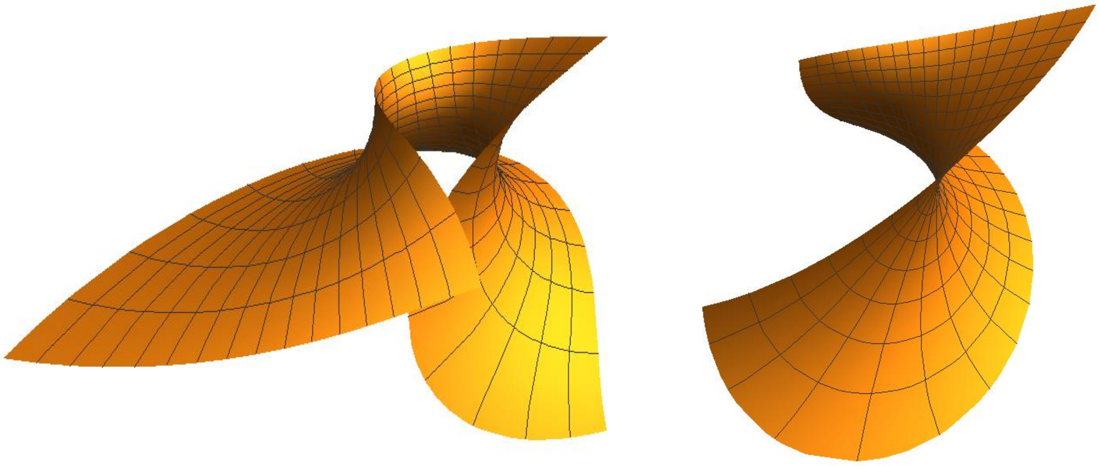
$$m=m(u;\,v)=\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}(bu+av)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\cos(au-bv)+\operatorname{ch}(bu+av)\right)-\sqrt{2}\sin(au-bv)};$$
$$n=n(u;\,v)=\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}(bu+av)}{\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\cos(au-bv)+\operatorname{ch}(bu+av)\right)-\sqrt{2}\sin(au-bv)};$$
$$j=j(u;v)=\frac{\sin(au-bv)}{\sqrt{2}\left(\cos(au-bv)+\operatorname{ch}(bu+av)\right)};$$
$$w=w(u;v)=\frac{\operatorname{sh}^2(au-bv)}{2\left(\cos(au-bv)+\operatorname{ch}(bu+av)\right)^2}.$$

Параметричні рівняння приєднаної мінімальної поверхні мають подібну будову із рівняннями (6), тому у даній статті не наводяться.

Вирази першої квадратичної форми утворених мінімальних поверхонь мають вигляд:

$$E=G=\frac{ch^2\left[2(bu+av)\right]}{2\left(\sin\left[2(au-bv)\right]+\operatorname{ch}\left[2(bu+av)\right]\right)};\ F=0. \qquad (7)$$

На рис. 1, *а* зображено мінімальну поверхню, побудовану за рівняннями (6) за умов $a=2;\ b=1;\ u\in[-0{,}3;\ldots1];\ v\in[-0{,}3;\ldots0{,}3]$.



а *б*

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих на основі ізотропної лінії (5)

На рис. 1, *б* зображено приєднану мінімальну поверхню. Мінімальні поверхні, побудовані на основі аналітичного опису ізотропної лінії (1) за протилежних знаків виразів аплікат, є конгруентними.

Висновки. За допомогою залежностей (1) на основі функцій $u(s) = \cos(a + bi)s$; $v(s) = \sin(a + bi)s$, де $i-$ уявна одиниця, $a, b \in R$, знайдено аналітичний опис ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь. Параметричні рівняння мінімальних поверхонь отримано у вигляді елементарних функцій, що дозволяє враховувати їх диференціальні характеристики для оптимізації інженерних методів проектування.

Література

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В. Расчёт оболочек сложной формы. К.: Будівельник, 1990. 192 с.
2. Аушева Н. М.Побудова викройки поверхні тентової конструкції. *Сучасні проблеми моделювання.* 2019. №14. С. 3–16.
3. Математическая энциклопедия / гл.ред. И.М. Виноградов. Москва: Изд–во «Советская энциклопедия», 1982. Т.3. С.683–690.
4. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Дослідження аналітичних залежностей для утворення ізотропних ліній та конструювання мінімальних поверхонь. Енергетика та автоматика: електрон. наук. фахове вид. 2017. Вип. 4. С. 133–143. URL: http://journals.nubip.edu.ua/index.php/Energiya/issue/view/375.
6. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Аналітичний опис ізотропних ліній та

мінімальних поверхонь за допомогою тригонометричних функцій. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2018. № 94. С.77–81.

7. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній за допомогою гіперболічних функцій та утворення мінімальних поверхонь. Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». 2018. № 283. С. 141–148.

ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ И МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВАНИИ МНИМОЙ ПЛОСКОЙ ЛИНИИ ПОСТОЯННОЙ КОМПЛЕКСНОЙ КРИВИЗНЫ

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н., Федорина Т.П.,
Козаченко Н.В., Клюева К.С.

В данной статье осуществлено аналитическое описание изотропной линии нулевой длины и минимальных поверхностей средствами комплексного анализа. Использованы интегральные зависимости образования параметрических уравнений мнимых изотропных линий, полученные из равенства нулю дифференциала дуги пространственной линии. Параметрические уравнения изотропных линий получены с помощью функций $u(s)=\cos(a+bi)s$; $v(s)=\sin(a+bi)s$, *где* $i-$ *мнимая единица,* $a,b\in R$, *удовлетворяющих условие* $u^2+v^2=1$.

Аналитическое описание минимальных поверхностей и присоединенных минимальных поверхностей осуществляется в комплексном пространстве с изотропными линиями в качестве линий сети переноса. Приведены выражения коэффициентов первой квадратичной формы образованных минимальных поверхностей.

Показано, что для функций $u(s)=\cos(a+bi)s$; $v(s)=\sin(a+bi)s$ *можно отыскать аналитическое описание двух разных пространственных изотропных линий нулевой длины с помощью функций комплексной переменной. Каждой изотропной линии соответствует минимальная поверхность и присоединённая минимальная поверхность, имеющие общие свойства гауссовой кривизны поверхности. Минимальные поверхности, построенные на основе аналитического описания изотропной линии с противоположными знаками аппликат, являются конгруэнтными.*

Предложенная авторами статьи методика непрерывного геометрического моделирования имеет преимущества, обусловленные нахождением параметрических уравнений минимальных поверхностей в виде элементарных функций. Такое аналитическое описание минимальных поверхностей позволяет учитывать их *дифференциальные характеристики для оптимизации инженерных методов проектирования поверхностей технических форм и архитектурных конструкций.*

Ключевые слова: изотропная линия, минимальная поверхность, средняя кривизна поверхности, кривизна плоской кривой, функция комплексного переменного.

FORMATION OF ISOTROPIC LINES AND MINIMAL SURFACES BASED ON THE IMAGINARY FLAT LINE OF THE CONSTANT COMPLEX CURVATURE

Pylypaka S., Mukvich M., Fedoryna T., Kozachenko N., Kliuieva C.

This article provides an analytical description of an isotropic line of zero length and minimal surfaces by means of complex analysis. The integral dependences of the formation of parametric equations of imaginary isotropic lines are used, obtained from the equality of the differential of the arc of the spatial line to zero. The parametric equations of isotropic lines are obtained using the functions $u(s)=\cos(a+bi)s$; $v(s)=\sin(a+bi)s$, *were* $i-$ *the imaginary unit,* $a,b \in R$, *satisfying the condition* $u^2+v^2=1$.

The analytical description of the minimal surfaces and the attached minimal surfaces is carried out in a complex space with isotropic lines as lines of the transfer network. The expressions of the coefficients of the first quadratic form of the formed minimal surfaces are given.

It is shown that for functions $u(s)=\cos(a+bi)s$; $v(s)=\sin(a+bi)s$ *one can find an analytical description of two different spatial isotropic lines of zero length using functions of a complex variable. Each isotropic line corresponds to a minimal surface and an attached minimal surface, having common properties of the Gaussian curvature of the surface. Minimal surfaces constructed on the basis of an analytical description of an isotropic line with opposite signs of applicate are congruent.*

The method of continuous geometric modeling proposed by the authors of the article has known advantages due to the finding of the parametric equations of minimal surfaces in the form of elementary functions. Such an analytical description of minimal surfaces allows one to take into account their differential characteristics for optimization of engineering methods for designing surfaces of technical forms and architectural structures.

Key words: isotropic line, minimal surface, main surface curvature, curvature of a flat curve, function of a complex variable.