УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ БЕЗЬЄ НА ОСНОВІ КРИВИХ ЗА ГОДОГРАФОМ ПІФАГОРА

Аушева Н.М., д.т.н.,
Гуменний А.А., аспірант*
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
(Україна)

Мінімальні поверхні мають суттєве значення для геометричного моделювання, комп'ютерних наук та для різних галузей інженерії, а визначення умов для їх побудови досліджено у багатьох роботах та налічує чималу кількість методів. Однак, ця тематика ще не вичерпана при використанні ізотропних кривих для побудови мінімальних поверхонь. В цих дослідженнях основна увага приділяється способам визначення кривих з нульовою довжиною. Для інтерактивного керування такими кривими доцільно використовувати криві, що побудовані на основі характеристичних многокутників, тому дослідження проводяться на основі кривих Безьє.

В роботі висвітлено досвід попередніх досліджень в області побудови просторових ізотропних кривих та плоских кривих за годографом Піфагора. Моделювання просторових кривих за годографом Піфагора здійснюється на основі теорії кватерніонів. Автори роботи презентують інший підхід, а саме побудову ізотропної просторової кривої на основі плоскої кривої Безьє за годографом Піфагора. Перехід до просторової кривої здійснюється на основі визначення третьої координати з умови рівності нулю довжини. В цьому випадку плоска крива будується на основі дійсних значень, а третя координата буде суто уявна.

Автори проводять дослідження на основі кривих п'ятого порядку. В цьому випадку в якості базових поліномів доцільно обирати квадратичні функції. Запропоновано три варіанти для завдання початкових значень координат для визначення кривої за годографом Піфагора. Найбільш практичне значення має завдання граничних точок кривої і визначення проміжних точок кривої Безьє на основі заданих залежностей. Для доведення достовірності запропонованих положень виконується розрахунок точок кривої та даються приклади змодельованих кривих. Подальші дослідження

---
* Науковий керівник – д.т.н., професор Аушева Н.М.

пов'язані з застосуванням побудованих кривих для моделювання мінімальних поверхонь та ізотропних порцій Безьє.

Ключові слова: ізотропна крива, крива Безьє, крива за годографом Піфагора.

Постановка проблеми. Для моделювання мінімальних поверхонь доцільно використовувати теорію функцій комплексної змінної. Для цього необхідно будувати криві нульової довжини [1]. Керування формою такої кривої можна здійснювати, якщо використовувати подання у формі Безьє, NURBS та інші [2, 3]. Задача знаходження довжини пов'язана з застосуванням ітераційних методів. Для вирішення цієї проблеми Р. Фароуки було запропоновано застосовувати спеціальні криві за годографом Піфагора [4]. Застосування такого подання для моделювання просторових ізотропних кривих досліджувалось на основі теорії кватерніонів [5], але не було досліджено способи формування на основі плоских кривих.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблематика побудови ізотропних кривих досліджувалась у багатьох роботах [1,2,3]. В роботі Р. Фароуки [4] було запропоновано застосовувати подання, за допомогою якого при знаходженні довжини кривої можна перейти до форми, яка значно полегшує її інтегрування.

У роботах учнів проф. Пилипаки С.Ф. Чернишової Е.О. та Коровіної І.О. [6,7] розглядається моделювання просторової ізотропної кривої за допомогою плоскої параметричної кривої. В роботі [8] пропонується застосовувати криві за годографом Піфагора для моделювання кривих на основі натурального параметра.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є розробка способу конструювання ізотропних просторових кривих Безьє на основі плоских кривих за годографом Піфагора.

Основна частина. Покажемо на прикладі кривої п'ятого порядку формування просторової ізотропної кривої Безьє. Будемо визначати криві Безьє у вигляді:

$$r(t)=\sum_{i=0}^{5} b_{i,5}(t) r_i, t\in[0,1], \tag{1}$$

де $b_{i,5}(t)$ – поліноми Бернштейна.

Плоска крива $r(t)=[x(t) \quad y(t)]$ буде кривою за годографом Піфагора (PH-кривою), якщо виконуються наступні умови [4]:

$$\begin{gathered} |r'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \\ x'(t) = u(t)^2 - v(t)^2,\ y'(t) = 2u(t)v(t), \end{gathered} \tag{2}$$

де $\sigma(t), u(t),\ v(t)$ – деякі поліноми.

При диференціюванні виразу (2), отримаємо:

$$r'(t)=5\sum_{i=0}^{4}b_{i,4}(t)r_i, t\in[0,1]. \qquad (3)$$

Аналізуючи вирази (2) та (3) зрозуміло, що поліноми $u(t)$ та $v(t)$ мають бути квадратичними. Представимо їх у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} u(t)&=(1-t)^2u_a+(1-t)tu_b+t^2u_c,\\ v(t)&=(1-t)^2v_a+(1-t)tv_b+t^2v_c, \end{aligned} \qquad (4)$$

де $u_a,\ u_b,\ u_c, v_a, v_b,\ v_c$ – деякі дійсні числа.

Підставимо вирази (4) у (3), будемо мати:

$$\begin{gathered} x_1=\frac{u_a^2-v_a^2}{5}+x_0,\ y_1=2\frac{u_av_a}{5}+y_0;\\ x_2=\frac{u_au_b-v_av_b}{10}+x_1,\ y_2=\frac{u_av_b+u_bv_a}{10}+y_1;\\ x_3=\frac{\left(u_b^2+2u_au_c\right)-\left(v_b^2+2v_av_c\right)}{30}+x_2,\ y_3=\frac{u_bv_b+u_av_c+u_cv_a}{15}+y_2;\\ x_4=\frac{u_bu_c-v_bv_c}{10}+x_3,\ y_4=\frac{u_bv_c+u_cv_b}{10}+y_3;\\ x_5=\frac{u_c^2-v_c^2}{5}+x_4,\ y_5=2\frac{u_cv_c}{5}+y_4. \end{gathered} \qquad (5)$$

Вирази (5) дозволяють розрахувати координати характеристичного многокутника для кривої Безьє та дозволяють керувати формою кривої за допомогою коефіцієнтів $u_a, u_b, u_c, v_a, v_b, v_c$. При варіюванні початковими значеннями будемо мати різні варіанти вирішення задачі. Для розрахунку координат кривої застосовуються дійсні числа. При використанні комплексних значень для плоскої кривої моделювання просторової ізотропної кривої можна здійснити на основі деформації.

Варіант 1. Будемо задавати коефіцієнти u_a,u_b,u_c,v_a,v_b,v_c для поліномів (4). Тоді координати характеристичного многокутника кривої знаходяться на основі простої підстановки коефіцієнтів поліномів у вирази (5). Для однозначного визначення кривої необхідно задати ще координати початкової точки: (x_0, y_0).

Приклад 1. Побудуємо плоску РН-криву Безьє п’ятого порядку, якщо задані наступні значення: $x_0=1,\ y_0=2,\ u_a=3,\ u_b=-2,\ u_c=-5,\ v_a=7,\ v_b=6, v_c=-2$.

Для розрахунків будемо застосовувати співвідношення (5).

Одержимо: $x_1 = -7,\ x_2 = -\dfrac{59}{5},$
$x_3 = -\dfrac{194}{15},\ x_4 = -\dfrac{161}{15},$
$x_5 = -\dfrac{98}{15},\ y_1 = \dfrac{52}{5},\ y_2 = \dfrac{54}{5},$
$y_3 = \dfrac{109}{15}, y_4 = \dfrac{14}{3}, y_5 = \dfrac{26}{3}.$

На рис.1 відображено побудовану криву.

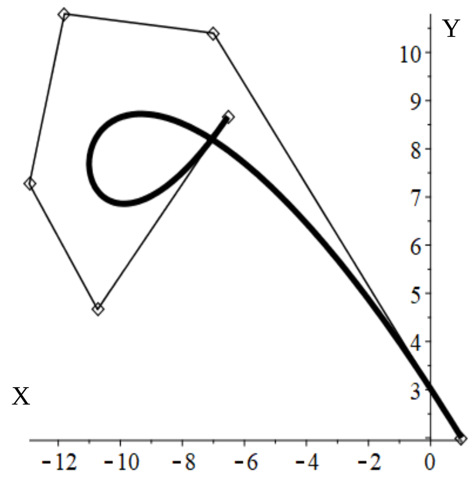

Рис.1. Крива Безьє на основі завдання точки (x_0, y_0)

Варіант 2. Будемо задавати координати двох точок (x_0, y_0), (x_1, y_1) та $u_b,\ u_c, v_b,\ v_c$. За таких умов необхідно розв'язувати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 - y_0 = 2\dfrac{u_a v_a}{5}, \\ x_1 - x_0 = \dfrac{u_a^2 - v_a^2}{5} \end{cases} \qquad (6)$$

та знаходити невідомі значення $u_a,\ v_a$.

Приклад 2. Побудуємо криву Безьє, якщо задані : $x_0 = 1$, $y_0 = 2,\ x_1 = 3,\ y_1 = 8,\ u_b = -2, u_c = -5, v_b = 6, v_c = -2$.

На основі виразу (5) одержимо два розв'язку: $(u_{1a} = 4.562,\quad v_{1a} = 3.288)$ та $(u_{2a} = -4.562,\ v_{2a} = -3.288)$.

Візьмемо перші значення та підставимо у вирази (7). Будемо мати: $x_2 = 0.115,\ x_3 = -2.034,$
$x_4 = 0.166,\ x_5 = 4.366,\ y_2 = 10.08,$
$y_3 = 7.575,\ y_4 = 4.975,\ y_5 = 8.975.$

На рис.2 відображено побудовану криву.

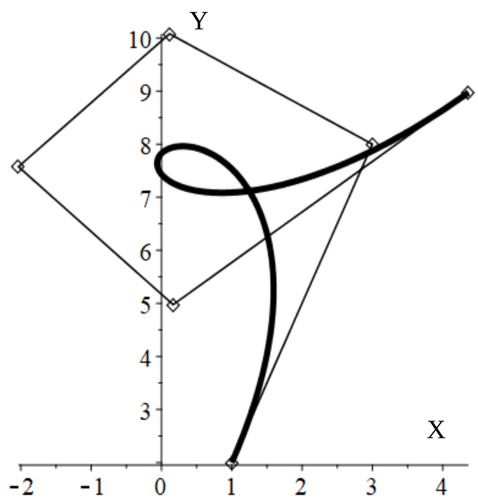

Рис.2. Крива Безьє на основі завдання (x_0, y_0), (x_1, y_1)

Варіант 3. Побудова кривих Безьє за умови відомих однієї або кількох точок з однієї сторони зрідка вирішує певні задачі, що стоять перед інженерами. Частішою є умова, коли задано граничні точки характеристичного многокутника (x_0, y_0) та (x_5, y_5). З виразів (5) одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_5 = \dfrac{a}{10} + \dfrac{b}{30} + \dfrac{c}{5} + x_0, \\ y_5 = \dfrac{d}{10} + \dfrac{e}{15} + 2\dfrac{f}{5} + y_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$a = u_b u_c - v_b v_c + u_a u_b - v_a v_b,\ b = 2u_a u_c + u_b^2 - 2v_a v_c - v_b^2,$$

$$c = u_a^2 - v_a^2 + u_c^2 - v_c^2,\ d = u_b v_c + u_c v_b + u_a v_b + u_b v_a,$$

$$e = u_a v_c + u_b v_b + u_c v_a,\ f = u_a v_a + u_c v_c.$$

Для розв'язання системи (7) необхідно додатково задавати чотири коефіцієнти для поліномів (4).

Приклад 3. Побудуємо плоску криву Безьє, якщо задані: $x_0 = 2$, $y_0 = -3,\ x_5 = 14, y_5 = 7, u_a = 6, u_c = 5, v_a = -3, v_c = 4$.

На основі виразу (7) одержимо: $u_b = 3.262,\ v_b = 6.28.$

На основі співвідношень (5): $x_1 = \dfrac{37}{5},\ x_2 = 11.241,\ x_3 = 13.081,$ $x_4 = 12.2,\ y_1 = -\dfrac{51}{5},\ y_2 = -7.41,$ $y_3 = -5.445,\ y_4 = -1.$

На рис.3 відображено побудовану криву.

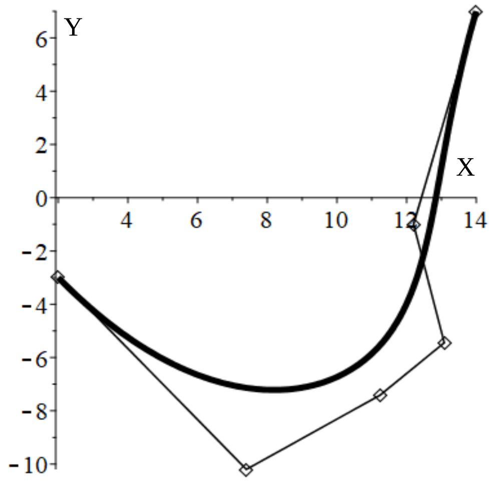

Рис.3. Крива Безьє на основі завдання (x_0, y_0), (x_5, y_5)

Для знаходження ізотропної кривою скористаємося наступним рівнянням:

$$z(t) = i\int \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{8}$$

Маючи на увазі вирази (2), будемо мати:

$$z(t) = i\int \left(u(t)^2 + v(t)^2\right)dt. \tag{9}$$

Підставимо у співвідношення (9) вирази (4), будемо мати:

$$z(t)=i\int(a(1-t)^4+\mathrm{b}(1-t)^3t+c(1-t)^2t^2+d(1-t)t^3+et^4)dt\,,$$

$$\begin{aligned} &a={u_a}^2+{v_a}^2,\, b=2(u_a u_b+v_a v_b),\\ &c=\left({u_b}^2+2u_a u_c\right)+\left({v_b}^2+2v_a v_c\right),\\ &d=2(u_b u_c+v_b v_c),\, e={u_c}^2+{v_c}^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Приклад 4. Знайдемо значення $z(t)$ для просторової кривої на основі плоскої кривої Безьє п’ятого порядку зі значеннями з прикладу1. На основі рівняння (10) одержимо:

$$z(t)=i\left(-\frac{58}{5}(1-t)^5-\frac{57}{5}t^5+62t^4-78t^3+36t^2\right).$$

Висновки. Проведені дослідження показали, що просторову ізотропну криву Безьє на основі плоскої кривої за годографом Піфагора можна знаходити без застосування апроксимаційних алгоритмів. Більше практичне значення має третій варіант задання початкових умов. Подальші дослідження пов’язані з моделюванням мінімальних поверхонь та ізотропних порцій та основі розробленого способу.

Література

1. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. 330 с.
2. Ausheva N, Olevskyi V., Olevska Y. Modeling of Minimal Surface Based on an Isotropic Bezier Curve of Fifth Order. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics (JGSP).* Bulgarian Academy of Sciences, 2019. Vol. 52. P. 1-15.
3. Andrianov I.V., _Ausheva N.M., _Olevska Y.B., _Olevskyi V.I. Surfaces Modelling Using Isotropic Fractional-Rational Curves. *Journal of Applied Mathematics*. Hindawi, 2019. Vol. 2019, Article ID 5072676, 13 p.
4. Farouki R.T. Pythagorean–Hodograph Curves: algebra and geometry inseparable. Berlin: Springer, 2008. 728 p.
5. Аушева Н.М. Моделювання сім’ї ізотропних просторових кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2016. Вип. 7. С. 3-9.
6. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції : автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / Київський національний університет будівництва і архітектури. Київ, КНУБА. 2012. 19 с.

7. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм: автореф. дис. … канд. техн. наук : 05.01.01. Київ, КНУБА. 2007. 20 с.
8. Захарова Т.М., Кремець Т.С. Плоскі криві у функції натурального параметра на основі годографа Піфагора. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2017. Вип. 8. С. 65-70.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ БЕЗЬЕ НА ОСНОВЕ КРИВЫХ ПО ГОДОГРАФУ ПИФАГОРА

Аушева Н.М., Гуменный А.А.

Минимальные поверхности имеют существенное значение для геометрического моделирования, компьютерных наук и для различных отраслей инженерии, а определение условий для их построения исследованы во многих работах и насчитывает большое количество методов. Однако, эта тематика еще не исчерпана при использовании изотропных кривых для построения минимальных поверхностей. В этих исследованиях основное внимание уделяется способам определения кривых с нулевой длиной. Для интерактивного управления такими кривыми целесообразно использовать кривые, построенные на основе характеристических многоугольников, поэтому исследования проводятся на основе кривых Безье.

В работе освещен опыт предыдущих исследований в области построения пространственных изотропных кривых и плоских кривых по годографу Пифагора. Моделирование пространственных кривых по годографу Пифагора осуществляется на основе теории кватернионов. Авторы работы представляют другой подход, а именно построение изотропной пространственной кривой на основе плоской кривой Безье по годографу Пифагора. Переход к пространственной кривой осуществляется на основе определения третьей координаты из условия равенства нулю длины. В этом случае плоская кривая строится на основе действительных значений, а третья координата будет чисто мнимая.

Авторы проводят исследования на основе кривых пятого порядка. В этом случае в качестве базовых полиномов целесообразно выбирать квадратичные функции. Предложено три варианта для задания начальных значений координат для определения кривой по годографу Пифагора. Наиболее практическое значение имеет задача граничных точек кривой и определение промежуточных точек кривой Безье на основе заданных зависимостей. Для доказательства достоверности предложенных положений выполняется расчет точек кривой и даются примеры смоделированных кривых.

Дальнейшие исследования связаны с применением построенных кривых для моделирования минимальных поверхностей и изотропных порций Безье.

Ключевые слова: изотропная кривая, кривая Безье, кривая по годографу Пифагора.

MODELING OF SPATIAL ISOTROPIC BÉZIER CURVES ON THE BASIS OF PYTHAGOREAN-HODOGRAPH CURVES

Ausheva N., Humennyi A.

Minimal surfaces are essential for geometric modeling, computer science, and for various branches of engineering, and the determination of the conditions for their construction has been studied in many works and includes a large number of methods. However, this topic has not yet been exhausted when using isotropic curves to construct minimal surfaces. These studies focus on methods for determining zero-length curves. For interactive control of such curves, it is advisable to use curves constructed on the basis of characteristic polygons, therefore, studies are based on Bézier curves.

The paper highlights the experience of previous studies in the field of constructing spatial isotropic curves and plane Pythagorean-Hodograph curves. The modeling of spatial Pythagorean-Hodograph curves is based on the theory of quaternions. The authors of the paper present a different approach, namely, the construction of an isotropic spatial curve based on a plain Bézier Pythagorean-Hodograph curve. The transition to the spatial curve is carried out on the basis of determining the third coordinate from the condition that the length is equal to zero. In this case, a plain curve is built on the basis of real values, and the third coordinate will be purely imaginary.

The authors carry out studies based on fifth-order curves. In this case, it is advisable to choose quadratic functions as basic polynomials. Three options are proposed for setting the initial values of the coordinates for determining the Pythagorean-Hodograph curve. The problem of the boundary points of the curve and the determination of the intermediate points of the Bezier curve based on the given dependences have the most practical importance. To prove the reliability of the proposed provisions, the calculation of the points of the curve is performed and examples of simulated curves are given. Further research involves the use of the constructed curves for modeling minimal surfaces and isotropic portions of Bézier.

Key words: isotropic curve, Bézier curve, Pythagorean-Hodograph curve.