УДК 515:721.02.23

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Браилов А.Ю., д.т.н.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры (Украина)

В настоящей работе обоснована актуальность определение геометрического места образа, равноудаленного от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек, при создании современных архитектурных сооружений и инженерных конструкций. Выявлена проблема и поставлены первостепенные задачи. Суть проблемы есть противоречие между необходимостью разработки трехмерных объектов и двухмерными способами получения результата. Целью настоящего исследования является разработка способа и методики определения геометрического образа, равноудаленного от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек. Задачи публикации: 1. Выполнить анализ предложенного решения олимпиадной геометрической задачи повышенной сложности. 2. Разработать способ и методику графического решения инженерной геометрической задачи повышенной сложности. Выполнен анализ предложенного решения олимпиадной геометрической задачи повышенной сложности. Выдвинуты: Предположение 1. Геометрическим местом искомого образа, равноудаленного от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек A, B, C, D, является точка K. Точка K равноудалена от заданных точек A, B, C, D, если она представляет собой центр сферы, на которой располагаются все четыре несовпадающих в трехмерном пространстве точки A, B, C, D. Предположение 2. Центр K сферы с точками A, B, C, D расположен на пересечении серединных перпендикуляров, восстановленных ко всем ко всем четырем плоским граням пирамиды, вершины которой A, B, C, D принадлежат этой сферической поверхности. Каждый такой серединный перпендикуляр к плоской грани пирамиды ABCD и есть геометрическое место точек, равноудаленных от трех вершин соответствующей грани. Выполненное исследование доказывает справедливость выдвинутых предположений. Предложен способ решения геометрической задачи, заключающийся в графическом построении центров плоских граней пирамиды, вершины которой располагаются на сфере, построении серединных перпендикуляров к каждой грани через их центры и определения точки пересечения этих *перпендикуляров. На основании предложенного способа разработана методика графического решения инженерной геометрической задачи.*

Ключевые слова: точка, геометрическое место, анализ, способ, методика, алгоритм, комплексный чертеж.

Постановка проблемы. Основной проблемой в решении такой задачи есть *противоречие* между необходимостью разработки трехмерных объектов и двухмерными способами получения результата [1-3].

Определение геометрического места образа, равноудаленного от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек, является актуальной задачей при создании современных архитектурных сооружений и инженерных конструкций.

Анализ последних исследований и публикаций. Данная задача была предложена на Олимпиаде по начертательной геометрии в Одесской государственной академии строительства и архитектуры (рис. 1). Предложено "построить геометрическое место точек, равноудаленных от точек A, B, C, D" и представлено решение задачи (рис. 2). В представленном решении для получения результата отрезком прямой линии объединяется пара точек A и B. Для предложенного способа решения задачи представленный результат не является единственным.

Количество возможных результатов для предложенного способа – это число неупорядоченных подмножеств {A, B}, {A, C}, {A, D}, {B, C}, {B, D}, {C, D} из двух элементов (r=2) множества {A, B, C, D}, содержащего четыре элемента (k=4). Количество всех возможных результатов C_k^r равно числу сочетаний из двух точек множества, содержащего четыре точки: $C_k^r=k!/[r!\cdot(k-r)!]=4!/[2!(4-2)!]=4!/(2!\cdot 2!)=24/4=6$. Таким образом, количество всех возможных результатов для предложенного в образце способа решения задачи равно шести.

Графическим методом перемены плоскостей проекций [1-3] легко убедиться, что все шесть результатов представленного решения различны. Проверка на истинность любого из шести результатов (Рис. 3) подтверждает необходимость разработки способа получения действительного результата в корректно поставленной содержательной задаче.

Формулирование целей статьи. Целью настоящего исследования является разработка способа и методики определения геометрического образа, равноудаленного от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек.

Задачи публикации:

1. Выполнить анализ предложенного решения олимпиадной геометрической задачи повышенной сложности.
2. Разработать способ и методику графического решения актуальной инженерной геометрической задачи повышенной сложности.

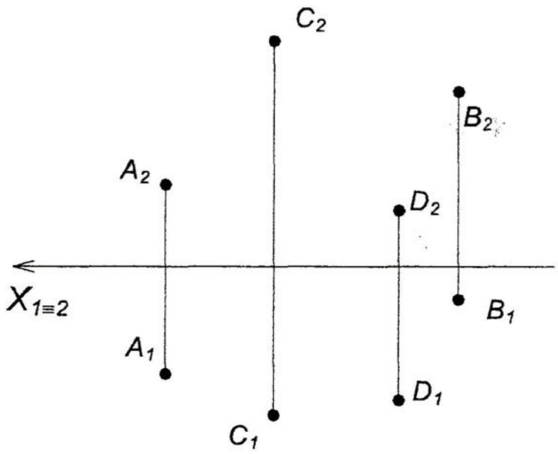
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Архітектурно-художній інститут
Кафедра нарисної геометрії та інженерної графіки

ОЛІМПІАДА
з нарисної геометрії

2019-2020 навч.рік	**Задача № 3**			**Кількість балів**	**25**

Побудувати геометричне місце точок рівновіддалених від точок **A**, **B**, **C**, **D**.

Построить геометрическое место точек равноудаленных от точек **A**, **B**, **C**, **D**.



Алгоритм (стислий запис)	
	1.
	2.
	3.

	Етапи розв' язання	Кількість балів		
1.	Вибір метода, алгоритм		ВИКОНАВ:	*Девіз*
2.	Графічні побудови			
3.	Розв' язання задачі		ПЕРЕВІРИВ:	*Підпис*
	Всього			

Рис. 1. Постановка задачи

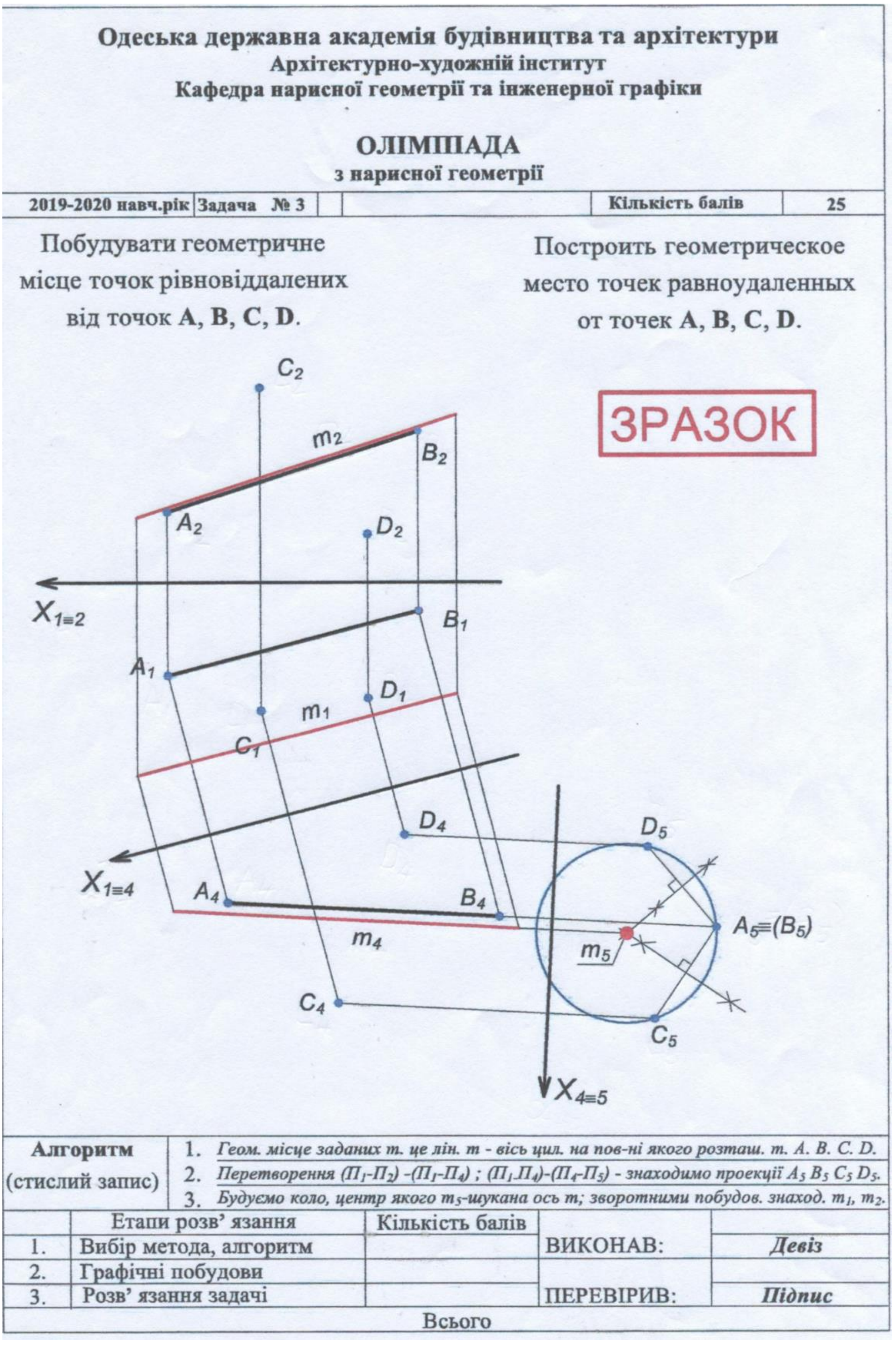


Рис. 2. Представленное решение задачи

Одеська державна академія будівництва та архітектури
Архітектурно-художній інститут
Кафедра нарисної геометрії та інженерної графіки

ОЛІМПІАДА
з нарисної геометрії

2019-2020 навч.рік	**Задача № 3**		**Кількість балів**	**25**

Побудувати геометричне місце точок рівновіддалених від точок **A, B, C, D**.

Построить геометрическое место точок равноудаленных от точек **A, B, C, D**.

Проверка предложенного результата на истинность

ЗРАЗОК

1. Строим секущую плоскость Ф перпендикулярно оси m цилиндра, которому принадлежат все четыре точки A, B, C, D: $Ф_4 \perp m_4 = O_4$, $D_4 \in Ф_4$, $O_5 \equiv m_5$.
2. Так как $O_4D_4 \parallel П_5$, то $O_5D_5 = OD$ длина проекции O_5D_5 равна OD натуральной величине (НВ) отрезка
3. Методом прямоугольного треугольника определяем натуральную величину отрезков OA, OB, OC! Все отрезки имеют разную длину.

Таким образом, расстояние от произвольно выбранной на "построенном геометрическом месте точек "m", равноудаленных от точек A, B, C, D", точки O до точек A, B, C, D различно

Алгоритм (стислий запис)	
1.	*Геом. місце заданих т. це лін. m - вісь цил. на пов-ні якого розташ. т. A. B. C. D.*
2.	*Перетворення ($П_1$-$П_2$) -($П_1$-$П_4$) ; ($П_1П_4$)-($П_4$-$П_5$) - знаходимо проекції A_5 B_5 C_5 D_5.*
3.	*Будуємо коло, центр якого m_5-шукана ось m; зворотними побудов. знаход. m_1, m_2.*

	Етапи розв' язання	Кількість балів		
1.	Вибір метода, алгоритм		ВИКОНАВ:	***Девіз***
2.	Графічні побудови			
3.	Розв' язання задачі		ПЕРЕВІРИВ:	***Підпис***
	Всього			

Следовательно, построенное геометрическое место точек "m" не является истинным результатом решения поставленной корректно содержательной задачи!

Рис. 3. Проверка на истинность представленного решения задачи

Основная часть. Разработка необходимого способа начинается с предположения о характере результирующего геометрического образа.

Предположение 1. Геометрическим местом искомого образа, равноудаленного от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек A, B, C, D, является точка K.

Точка K равноудалена от заданных точек A, B, C, D, если она представляет собой центр сферы, на которой располагаются все четыре несовпадающих в трехмерном пространстве точки A, B, C, D.

Для построения комплексного чертежа искомого образа необходимо графически определить положение центра K и натуральную величину радиуса $R_{нв}$ сферы с точками A, B, C, D.

Решение этой подзадачи связано с предположением о возможном способе построения центра K сферы с точками A, B, C, D.

Предположение 2. Центр K сферы с точками A, B, C, D расположен на пересечении серединных перпендикуляров, восстановленных ко всем ко всем четырем плоским граням пирамиды, вершины которой A, B, C, D принадлежат этой сферической поверхности.

Каждый такой серединный перпендикуляр к плоской грани пирамиды ABCD и есть геометрическое место точек, равноудаленных от трех вершин соответствующей грани.

Пересечение двух серединных перпендикуляров любых двух плоских граней вписанной в сферу пирамиды и есть точка K, равноудаленная в трехмерном пространстве от заданных четырех несовпадающих точек A, B, C, D.

Если выдвинутые предположения 1 и 2 верны, то графическими методами инженерной геометрии [1-3] решаются три подзадачи.

1. Построить комплексные чертежи четырех *центров* окружностей, описанных вокруг каждой треугольной грани пирамиды.

2. Построить комплексные чертежи серединных *перпендикуляров*, восстановленных через центры описанных окружностей к плоским граням пирамиды ABCD.

3. Построить комплексный чертеж *точки* пересечения серединных перпендикуляров.

Построение комплексного чертежа центра окружности, описанной через вершины треугольной грани пирамиды, выполняется методом перемены плоскостей проекций с помощью главной линии плоской грани [1-3]. Получен результат O^A (O_1^A, O_2^A) графического решения такой подзадачи, например, для грани BCD (рис. 4).

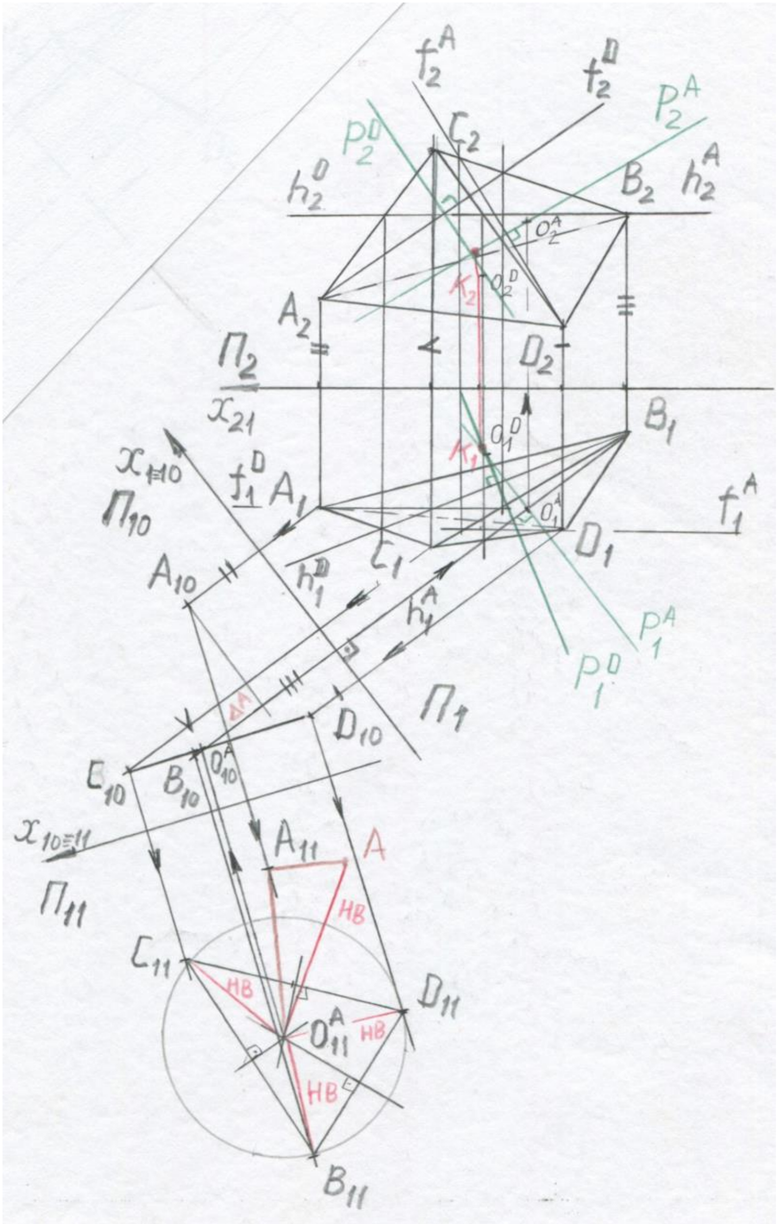


Рис. 4. Построение центра O^A описанной окружности, серединных перпендикуляров p^A, p^D и их точки пересечения K

Алгоритм построения комплексного чертежа центра окружности, описанной через вершины пространственной треугольной грани пирамиды, состоит из семи шагов.

1. Строится комплексный чертеж h^A (h_1^A, h_2^A) горизонтали, принадлежащей грани BCD.

2. Перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций $П_1$ вводится новая плоскость проекций $П_{10}$. И строится ось $x_{1\equiv10}$ перпендикулярно горизонтальной проекции h_1^A горизонтали h^A.

3. Строятся новые линии проекционных связей от горизонтальных проекций A_1, B_1, C_1, D_1 вершин пирамиды перпендикулярно новой оси $x_{1\equiv10}$.

4. На линиях проекционных связей в плоскости проекций $П_{10}$ засечками откладываются расстояния, равные по величине расстояниям от оси x_{21} между плоскостями заменяемой системы $П_2/П_1$ до соответствующих фронтальных проекций A_2, B_2, C_2, D_2 вершин пирамиды. Графически эти различные расстояния отмечаются черточками или другими любыми знаками.

5. На пересечении линии проекционных связей и засечек для соответствующих расстояний графически выделяются и обозначаются новые проекции A_{10}, B_{10}, C_{10}, D_{10} вершин пирамиды.

Поскольку горизонталь h^A плоскости грани BCD перпендикулярна плоскости проекций $П_{10}$, проекция $B_{10}C_{10}D_{10}$ этой грани является собирательным отрезком прямой линии. Если параллельно собирательной проекции $B_{10}C_{10}D_{10}$ плоской грани BCD ввести ортогональную к плоскости $П_{10}$ плоскость проекций $П_{11}$, то на эту новую плоскость $П_{11}$ треугольная грань BCD проецируется в натуральную величину.

6. Аналогично повторяя пункты 2-5 разработанного алгоритма, на новой плоскости проекций $П_{11}$ строится проекция $B_{11}C_{11}D_{11}$, равная натуральной величине треугольной грань BCD пирамиды ABCD. Центр O^A описанной окружности находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам $B_{11}C_{11}$, $C_{11}D_{11}$, $B_{11}D_{11}$ треугольника $B_{11}C_{11}D_{11}$.

7. Соблюдая закономерности метода перемены плоскостей проекций [1-3], обратным проецированием строятся проекции O_{10}^A, O_1^A, O_2^A центра O^A описанной окружности для треугольной грани BCD пирамиды ABCD.

Комплексные чертежи центров O^B, O^C, O^D описанных окружностей для остальных граней ABC, ACD, ABD строятся аналогично (рис. 5).

Построение комплексного чертежа серединного перпендикуляра, восстановленного через центр окружности, описанной вокруг вершин плоской грани пирамиды, выполняется на основании теоремы о проекции прямого угла [1-3]. Получен результат p^A (p_1^A, p_2^A) графического решения этой подзадачи, например, для грани BCD (рис. 4).

Алгоритм графического построения комплексного чертежа серединного перпендикуляра состоит из трех групп действий.

1. Строится комплексный чертеж f^A (f_1^A, f_2^A) фронтали f^A, принадлежащей плоскости грани BCD (рис. 4).

Строится комплексный чертеж h^A (h_1^A, h_2^A) горизонтали h^A, принадлежащей плоскости грани BCD, если ранее он не был построен.

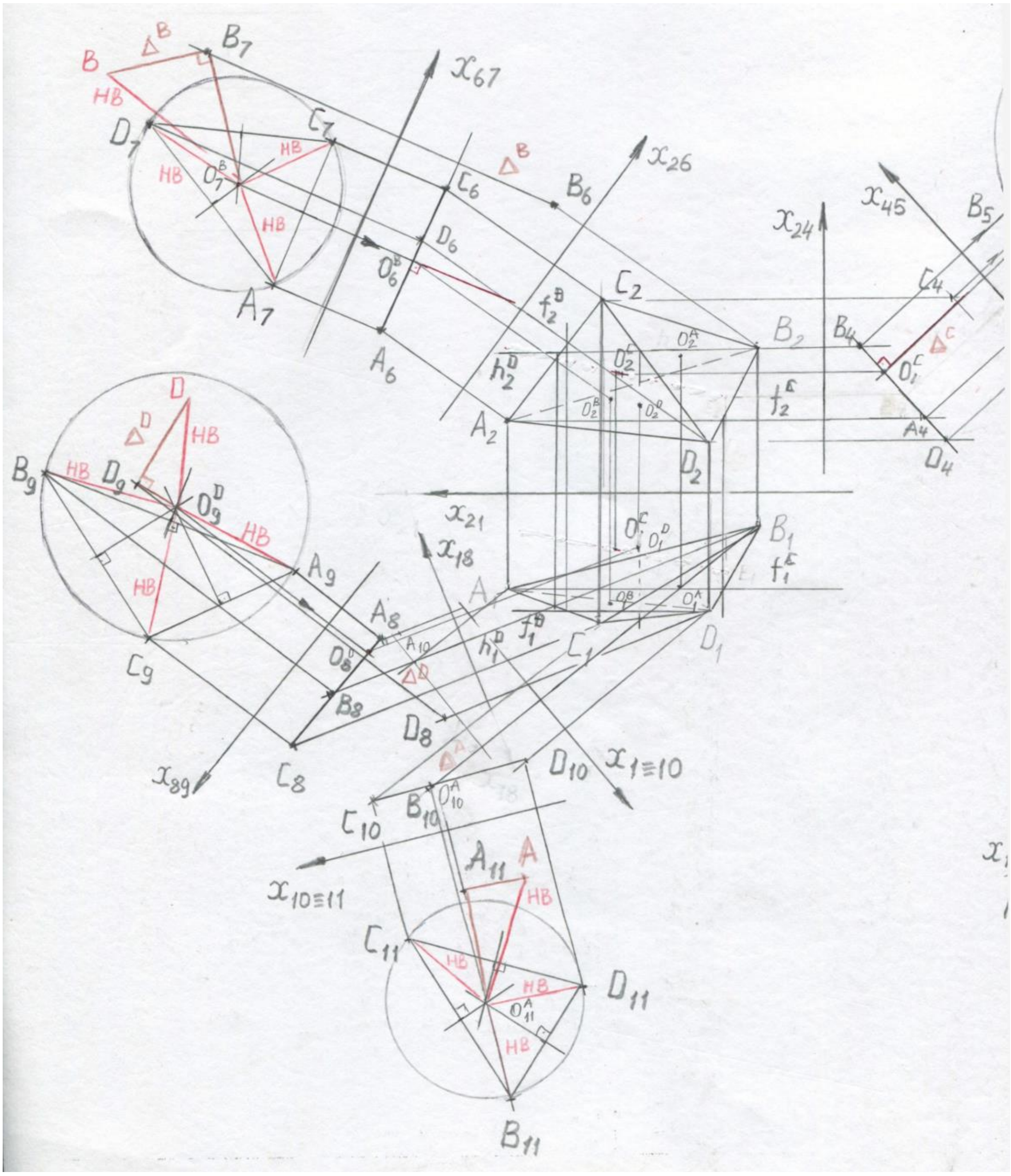


Рис. 5. Построение центров O^A, O^B, O^D описанных окружностей

2. Через горизонтальную проекцию O_1^A центра O^A, перпендикулярно горизонтальной проекции h_1^A горизонтали h^A, строится горизонтальная проекция p_1^A серединного перпендикуляра p^A к плоской грани BCD пирамиды ABCD.

3. Через фронтальную проекцию O_2^A центра O^A, перпендикулярно фронтальной проекции f_2^A фронтали f^A, строится фронтальная проекция p_2^A серединного перпендикуляра p^A к плоской грани BCD пирамиды ABCD.

Комплексные чертежи серединных перпендикуляров p^B, p^C, p^D для остальных граней ABC, ACD, ABD строятся аналогично (рис. 4, 6).

Построение комплексного чертежа K (K_1, K_2) точки K пересечения серединных перпендикуляров выполняется как пересечение соответствующих горизонтальных и фронтальных проекций любых двух перпендикуляров.

На различных комплексных чертежах (рис. 4, 6) построена точка K (K_1, K_2) пересечения серединных перпендикуляров p^A, p^D к граням BCD, ABC (рис. 4) и перпендикуляров p^B, p^C к граням ACD, ABD (рис. 6).

Критерием корректных верных графических построений (рис. 4, 6) является выполнение первого закона проекционных связей – построенная прямая линия, соединяющая горизонтальную K_1 и фронтальную K_2 проекции точки K, действительно перпендикулярна оси абсцисс [1-3].

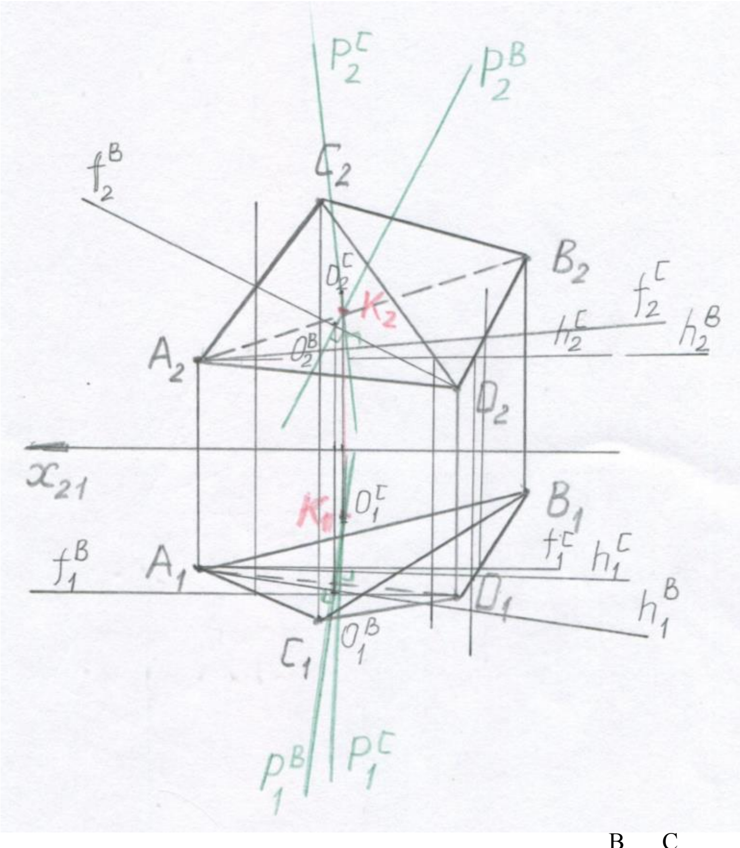


Рис. 6. Построение серединных перпендикуляров p^B, p^C и их точки пересечения K

Критерием истинности полученного графического решения является равенство значений координат точки K по оси аппликат для фронтальных проекций и по оси ординат для горизонтальных проекций для разных пар серединных перпендикуляров p^A, p^D (рис. 4) и p^B, p^C (рис. 6) на различных комплексных чертежах.

Таким образом, графическим способом доказана истинность второго предположения о наличии точки K пересечения двух срединных перпендикуляров.

Для проверки истинности первого предположения о равноудалённости построенной точки K от всех четырех заданных несовпадающих точек A, B, C, D строится комплексный чертеж Σ (Σ_1, Σ_2) сферы Σ с центром K, на поверхности которой расположены точки A, B, C, D (рис. 7).

Методом прямоугольного треугольника [1-3] на комплексном чертеже пяти точек A, B, C, D и K определяется натуральная величина радиуса $R_{нв}$ сферы с точками A, B, C, D, равноудаленными от её центра K (рис. 7).

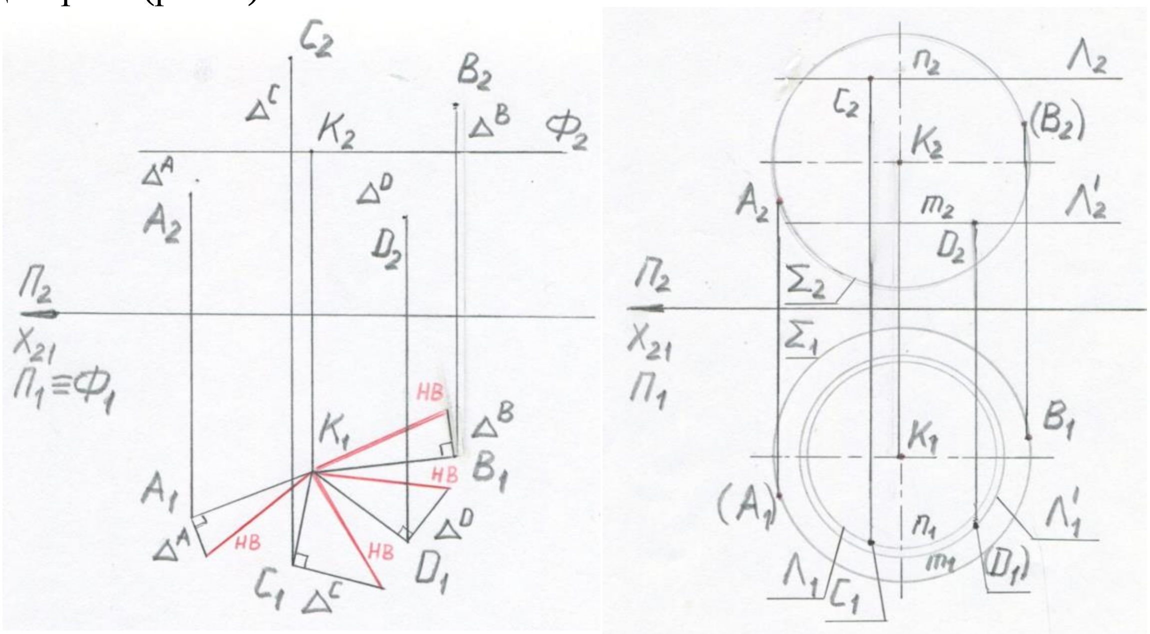


Рис. 7. Графический результат решения поставленной задачи

На отдельном комплексном чертеже (рис. 7), для заданного пространственного расположения точек A, B, C, D и определенного относительно этих точек центра K, строится сфера с натуральная величина радиуса $R_{нв}$, равной 26 мм.

Точки A, B принадлежат сфере Σ, поскольку фронтальные проекции A_2, B_2 принадлежат фронтальному очерку Σ_2 сферы, горизонтальные проекции A_1, B_1 принадлежат горизонтальному очерку Σ_1 сферы и выполняется первый закон проекционных связей.

Для доказательства принадлежности точек C, D сфере Σ строятся комплексные чертежи линий пересечения n и m горизонтальных плоскостей уровня Λ, Λ' со сферой Σ: $n=\Lambda\cap\Sigma$, $m=\Lambda'\cap\Sigma$ (рис. 7).

Точка тогда и только тогда принадлежит поверхности, когда она принадлежит какой-либо линии этой поверхности.

Поскольку фронтальная проекция C_2 точки C принадлежит фронтальной проекции n_2 линии n сферы Σ и горизонтальная проекция

C_1 точки C принадлежит горизонтальной проекции n_1 этой же линии n сферы Σ, то и сама точка C принадлежит сферической поверхности: C∈Σ. Аналогично графически доказывается принадлежность точки D сфере Σ, поскольку из чертежа (рис. 7) очевидно, что соответствующие проекции D_2, D_1 точки D принадлежат соответствующим проекциям m_2, m_1 линии m пересечения плоскости Λ' со сферой Σ.

Таким образом, точка A расположена на левой передней нижней четверти сферы Σ, точка B расположена на правой задней верхней четверти сферы Σ, точка C принадлежит левой передней верхней четверти сферы Σ, и точка D находится на правой передней нижней четверти сферы Σ с центром в точке K (рис. 7).

Следовательно, точка K и есть геометрическое место, равноудаленное от всех четырех заданных несовпадающих точек.

Выводы. 1. На основании выполненного анализа доказано, что геометрическим местом точек, равноудаленных от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек A, B, C, D, не является "ось цилиндра, на поверхности которого расположены точки A, B, C, D".

2. Выполненное исследование доказывает справедливость выдвинутого предположения о том, что геометрическим местом искомого образа, равноудаленного от четырех несовпадающих в трехмерном пространстве точек A, B, C, D, является точка K.

3. Доказана справедливость и второго выдвинутого предположения о том, что центр K сферы с точками A, B, C, D расположен на пересечении серединных перпендикуляров, восстановленных ко всем ко всем четырем плоским граням пирамиды, вершины которой A, B, C, D принадлежат этой сфере.

4. Предложен способ решения геометрической задачи, заключающийся в графическом построении центров плоских граней пирамиды, вершины которой располагаются на сфере, построении серединных перпендикуляров к каждой грани через их центры и определения точки пересечения этих перпендикуляров.

5. На основании предложенного способа разработана методика графического решения важной инженерной геометрической задачи.

Литература

1. Brailov A. Yu. Engineering Graphics. Theoretical Foundations of Engineering Geometry for Design. Springer International Publishing, 2016. 340 p.
2. Браилов А. Ю. Инженерная геометрия : Учебник. К.: Каравелла, 2016. 472 с.

3. Браілов О. Ю. Інженерна геометрія : Підручник. К.: Каравела, 2017. 516 с.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ОЛІМПІАДНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Браілов О. Ю.

У даній роботі обґрунтовано, що визначення геометричного місця образу, рівновіддаленого від чотирьох неспівпадаючих в тривимірному просторі точок, є актуальним завданням при створенні сучасних архітектурних споруд та інженерних конструкцій. Виявлена проблема і поставлені першочергові завдання. Суть проблеми є протиріччя між необхідністю розробки тривимірних об'єктів і двомірними способами отримання результату. Метою цього дослідження є розробка способу і методики визначення геометричного образу, рівновіддаленого від чотирьох неспівпадаючих в тривимірному просторі точок. Завдання публікації: 1. Виконати аналіз запропонованого рішення олімпіадної геометричної задачі підвищеної складності. 2. Розробити спосіб і методику графічного розв'язання інженерної геометричної задачі підвищеної складності. Виконано аналіз запропонованого рішення олімпіадної геометричної задачі підвищеної складності. Висунені: Припущення 1. Геометричним місцем шуканого образу, рівновіддаленого від чотирьох неспівпадаючих в тривимірному просторі точок A, B, C, D, є точка K. Точка K рівновіддалена від заданих точок A, B, C, D, якщо вона є центром сфери, на якій розташовуються усі чотири неспівпадаючих в тривимірному просторі точки A, B, C, D. Припущення 2. Центр K сфери з точками A, B, C, D розташовано на перетині серединних перпендикулярів, відновлених до усіх до усіх чотирьох плоских граней піраміди, вершини якої A, B, C, D належать цій сферичній поверхні. Кожен такий серединний перпендикуляр до плоскої грані піраміди ABCD і є геометричне місце точок, рівновіддалених від трьох вершин відповідної грані. Виконане дослідження доводить справедливість висунених припущень. Запропоновано спосіб рішення геометричної задачі, що полягає в графічній побудові центрів плоских граней піраміди, вершини якої розташовуються на сфері, побудові серединних перпендикулярів до кожної грані через їх центри та визначення точки перетину цих перпендикулярів. На підставі запропонованого способу розроблена методика графічного розв'язання інженерної геометричної задачі підвищеної складності.

Ключові слова: точка, геометричне місце, аналіз, спосіб, методика, алгоритм, комплексне креслення.

TECHNIQUE OF SOLUTION OF THE OLIMPIC GEOMETRICAL PROBLEM

Brailov A.

The present work argues that the determination of a geometrical place of an image, equally-spaced from four incoincident points in three-dimensional space, is an important problem in the design and erection of modern architectural and engineering structures. The common issues that the problem is comprised of and essential steps of their resolution are identified. It is revealed that the essence of the problem is the contradiction between necessity of development of three-dimensional objects and two-dimensional ways of obtaining result. The purpose of the present research is to develop a way and a technique of the determination of a geometrical image, equally-spaced from four incoincident points in three-dimensional space. Objectives of the present publication are*: 1. To complete the analysis of the developed solution of the Olympics geometrical problem of elevated complexity. 2. To develop a way and a technique of the graphic solution of an engineering geometrical problem of elevated complexity. The analysis of the obtained solution of the Olympics geometrical problem of elevated complexity is made. The following hypotheses are formulated: The hypothesis 1. A geometrical place of a required image, equally-spaced from four incoincident points in three-dimensional space A, B, C, D, is point K, which is equally-spaced from set points A, B, C, D if it is the center of the sphere on which all four points A, B, C, and D, non-coincident in three-dimensional space, are located. The hypothesis 2. Centre K of sphere with points A, B, C, D is located on the intersection of the middle perpendiculars set to all to all four flat sides of a pyramid, which base points A, B, C, D belong to this spherical surface. Each such middle perpendicular to a flat side of pyramid ABCD is also a geometrical place of points, equally-spaced from three corners of a corresponding side. The current research proves the validity of the hypothesis. The proposed way of the solution of the geometrical problem, consisting in graphic construction of the centers of flat sides of the pyramid, which tops settle down corners locate on sphere, construction of middle perpendiculars to each side through their centers and definitions of a point of intersection of these perpendiculars. On the basis of the proposed way, the methodology of the graphic solution of the engineering geometrical problem is developed.*

Keywords: point, geometrical place, the analysis, way, technique, algorithm, the complex drawing.