УДК 519.632.4

КООРДИНАТНИЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ

Вигоднер І.В.,
Маломуж Т.В., к.т.н.,
Старун Н.В., к.т.н.,
Тулученко Г.Я., д.т.н.,
Херсонський національний технічний університет (*Україна*)

У роботі досліджується стан методичного забезпечення підготовки студентів закладів вищої освіти непрофільних спеціальностей до участі в олімпіаді з дисципліни «математика». Найбільш складними для розв'язання традиційно виявляються олімпіадні задачі геометричного змісту. Труднощі виникають у зв'язку необхідністю виконання додаткових побудов та встановлення складних співвідношень між елементами геометричних фігур та тіл. Крім того, геометричні задачі олімпіадного рівня, як правило, потребують для свого розв'язання залучення методів кількох розділів математики.

Координатний метод в цьому випадку дозволяє знизити когнітивну складність процесу побудови розв'язку. Такий процес легше піддається алгоритмізації, що наближає координатний метод до алгебраїчних методів.

Ефективність розв'язання геометричних задач координатним методом суттєво залежить від доцільного розміщення досліджуваної фігури або тіла в системі координат. У задачах, де мова йде про вписані в коло фігури, доцільним є використання зв'язку між декартовою та полярною системами координат. При обчисленні площ фігур можна залучати формули, що містять визначники з координатами вершин трикутників, які їх складають. Цей прийом у сполученні з координатами вершин, які виражені через полярний радіус та полярний кут, дозволяє застосовувати тригонометричні тотожності для спрощення отримуваних виразів.

Додаткові можливості для розвитку в студентів здібностей до наукового пошуку надають задачі умовної оптимізації, де можливі випадки співпадіння та розрізнення глобальних та умовних екстремумів.

У статті розглядається геометрична задача, що пропонувалася на міжнародній олімпіаді для студентів, для якої наведено авторський розв'язок координатним методом. В опублікованих розв'язках цієї задачі такий підхід відсутній. Досліджувана задача *може бути сформульована в термінах задачі умовної оптимізації. Особливістю її розв'язання виявляється факт, що одна з точок глобальних максимумів задовольняє висунутим обмеженням.*

Ключові слова: координатний метод, олімпіада з дисципліни «математика».

Постановка проблеми. Методичному забезпеченню підготовки учнів до участі в олімпіадах з математики різного рівня традиційно приділяється багато уваги. Але у вищій школі математичний олімпіадний рух об'єднує здебільшого студентів, які навчаються на математичних (або споріднених) спеціальностях. Підготовка студентів до участі в таких заходах ведеться викладачами-ентузіастами.

Тому напрацювання методики підготовки студентів непрофільних спеціальностей до участі студентських олімпіадах з навчальної дисципліни «математика» є актуальною темою досліджень.

Аналіз основних досліджень і публікацій. До переваг координатного методу розв'язання геометричних задач відносять відсутність потреби в додаткових побудовах та їх обґрунтуванні, можливість чіткої алгоритмізації побудови розв'язку. Крім того, при використанні координатного методу для розв'язання задач природним шляхом залучаються методи інших розділів математики. Це визначає ефективність використання таких задач при підготовці студентів до участі в математичних олімпіадах та конкурсах [1–3].

Формулювання цілей статті. На прикладі задачі з геометричним змістом, яка пропонувалася на міжнародній олімпіаді з математики для студентів [2], показати ефективність застосування координатного методу.

Основна частина. Задачі геометричного змісту, які пропонуються на олімпіадах з математики для студентів, як правило, потребують застосування додаткових побудов та встановлення нетривіальних співвідношень між геометричними об'єктами. Але когнітивна складність розв'язків частини таких задач може бути суттєво спрощена за рахунок використання координатного методу.

Задача [2]. Восьмикутник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ вписано в коло. Відомо, що багатокутник $P_1P_3P_5P_7$ є квадратом з площею 5, а багатокутник $P_2P_4P_6P_8$ є прямокутником з площею 4. Знайти максимально можливу, за цих умов, площу восьмикутника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$.

Розв'язання. Запропонуємо інший спосіб розв'язання задачі, ніж це наведено в [2]. За умовою задача належить до задач умовної оптимізації. Для побудови залежностей для формування обмежень та цільової функції скористаємося координатним методом.

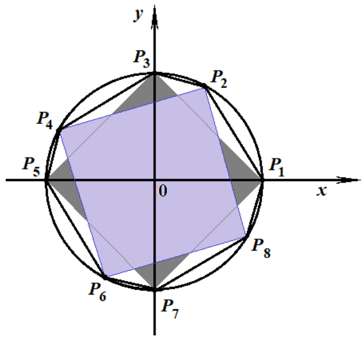

Рис. 1. Заданий восьмикутник з вкладеними чотирикутниками

Введемо систему координат, як на рис. 1. Радіус кола позначимо *R*. Полярні кути точок P_2 та P_4 позначимо відповідно α та β. Тоді вершини заданого восьмикутника будуть мати координати:

$$P_1(R;0),\ P_3(0;R),\ P_5(-R;0),\ P_7(0;-R),$$
$$P_2(R\cos\alpha;R\sin\alpha),\ P_6(-R\cos\alpha;-R\sin\alpha),$$
$$P_4(R\cos\beta;R\sin\beta),\ P_8(-R\cos\beta;-R\sin\beta).$$

Із умови $S(P_1P_3P_5P_7)=5$ за теоремою Піфагора (або формулою площі квадрата через добуток його діагоналей) знаходимо, що $R=\sqrt{5/2}$.

Для обчислення площі трикутника $P_2P_4P_6$ залучимо формулу, що використовує координати вершин трикутника:

$$S(P_2P_4P_6)=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & R\cos\alpha & R\sin\alpha\\ 1 & R\cos\beta & R\sin\beta\\ 1 & -R\cos\alpha & -R\sin\alpha\end{vmatrix}=R^2\sin(\beta-\alpha).$$

Тоді площа прямокутника $P_2P_4P_6P_8$ дорівнює:

$$S(P_2P_4P_6P_8)=2R^2\sin(\beta-\alpha).$$

Із умов $S(P_2P_4P_6P_8)=4$ та $R=\sqrt{5/2}$ маємо:

$$\begin{aligned}&2\cdot\frac{5}{2}\cdot\sin(\beta-\alpha)=4;\\ &\sin(\beta-\alpha)=\frac{4}{5}.\end{aligned}\tag{1}$$

Площа восьмикутника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ складається з площі квадрата $P_1P_3P_5P_7$ та подвоєної суми площ трикутників $P_1P_2P_3$, $P_3P_4P_5$. Знайдемо вирази для площ цих трикутників:

$$S(P_1P_2P_3)=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & R & 0\\ 1 & R\cos\alpha & R\sin\alpha\\ 1 & 0 & R\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot R^2(\sin\alpha+\cos\alpha-1);$$

$$S(P_3P_4P_5)=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & R\\ 1 & R\cos\beta & R\sin\beta\\ 1 & -R & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot R^2(\sin\beta-\cos\beta-1).$$

Отже, площа восьмикутника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ дорівнює:

$$S(P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8)=S(P_1P_3P_5P_7)+2\cdot\left(S(P_1P_2P_3)+S(P_3P_4P_5)\right)=$$
$$=5+R^2\cdot\left((\sin\alpha+\cos\alpha-1)+(\sin\beta-\cos\beta-1)\right)=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\cos\alpha-\cos\beta)$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=$$
$$=5\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sqrt{\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}=$$
$$=5\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sqrt{\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2}+2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}}=$$
$$=5\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sqrt{1+\sin(\beta-\alpha)}=$$
$$=5\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{5}}=5\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Очевидно, що найбільшого значення площа восьмикутника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ досягає, коли $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=1$.

Перевіримо, чи виконуються в точці глобального максимуму інші вимоги задачі. Розв’яжемо систему:

$$\begin{cases}\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{4}{5}\\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=(-1)^k\arcsin\dfrac{4}{5}+\pi k\\ \alpha+\beta=\pi+4\pi n\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{4}{5} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}k + 2\pi n, \quad k,n \in Z; \\ \alpha = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2}\arcsin\dfrac{4}{5} + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}k + 2\pi n, \quad k,n \in Z. \end{cases}$$

Очевидно, що коли $k=1$ та $n=0$, тоді

$$\begin{cases} \beta = \pi - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{5} \approx 2{,}68; \\ \alpha = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{5} \approx 0{,}46. \end{cases}$$

Отже, отримані значення кутів відповідають обмеженням $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} \le \beta < \pi$ з умови задачі.

Висновки. Ефективність розв’язання геометричних задач координатним методом суттєво залежить від доцільного розміщення досліджуваної фігури або тіла в системі координат. Крім того, у студентів формується навички до комплексного застосування методів, які належать до різних розділів математики, що є корисним і для їх професійної підготовки.

Література

1. Рыжков, А. Е., Фролов, В. М., Петтай, П. П. Зеркало студенческой математической олимпиады Уильяма Лоуэлла Патнема. *Развитие современного образования: теория, методика и практика.* 2015. № 2(4). С. 68–76.
2. The Putnam Archive. URL: https://kskedlaya.org/putnam-archive/
3. Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil. The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary American Mathematical Soc. Washington: MAA Service Center, 2002. 337 p.

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Выгоднер И.В., Маломуж Т.В., Старун Н.В., Тулученко Г.Я.

В работе изучается состояние методического обеспечения подготовки студентов высших учебных заведений непрофильных *специальностей к участию в олимпиаде по дисциплине «математика». Наиболее сложными для решения традиционно оказываются олимпиадные задачи геометрического содержания. Трудности возникают в связи с необходимостью выполнения дополнительных построений и установления сложных соотношений между элементами геометрических фигур и тел. Кроме того, геометрические задачи олимпиадного уровня, как правило, требуют для своего решения привлечения методов нескольких разделов математики.*

Координатный метод в этом случае позволяет снизить когнитивную сложность процесса построения решения. Такой процесс легче поддается алгоритмизации, что приближает координатный метод к алгебраическим методам.

Эффективность решения геометрических задач координатным методом существенно зависит от целесообразного размещения исследуемой фигуры или тела в системе координат. В задачах, где речь идет о вписанных в окружность фигурах, целесообразным является использование связи между декартовой и полярной системами координат. При вычислении площадей фигур можно привлекать формулы, содержащие определители с координатами вершин треугольников, которые входят в их состав. Этот прием в сочетании с координатами вершин, которые выражены через полярный радиус и полярный угол, позволяет применять тригонометрические тождества для упрощения получаемых выражений.

Дополнительные возможности для развития у студентов способностей к научному поиску предоставляют задачи условной оптимизации, где возможны случаи совпадения и различия глобальных и условных экстремумов.

В статье рассматривается геометрическая задача, которая предлагалась на международной олимпиаде для студентов. Для этой задачи приведено авторское решение координатным методом. В опубликованных решениях этой задачи такой подход не использовался. Исследуемая задача может быть сформулирована в терминах задачи условной оптимизации. Особенностью ее решения оказывается тот факт, что одна из точек глобальных максимумов удовлетворяет существующим ограничениям.

Ключевые слова: координатный метод, олимпиада по дисциплине «математика».

COORDINATE METHOD IN THE PROBLEMS OF HIGHER COMPLEXITY OF GEOMETRIC CONTENT

Vygodner I., Malomuzh T., Starun N., Tuluchenko G.

The state of methodological support for the preparation of students of higher educational institutions of non-core specialties for participation in the olympiad in the discipline "mathematics" is examined in the article. The Olympiad problems of geometric content are most difficult to solve traditionally. Difficulties arise due to the need to perform additional constructions and establish complex relationships between elements of geometric figures and bodies. In addition, geometric problems of the olympiad level, as a rule, require methods of several branches of mathematics for their solution.

In this case the coordinate method reduces the cognitive complexity of the solving process. Such a process is easier to algorithmize. It brings the coordinate method to algebraic methods.

The efficiency of solving geometric problems by the coordinate method substantially depends on the appropriate placement of the studied figure or body in the coordinate system. In problems where it comes to figures inscribed in a circle, it is advisable to use the relationship between the Cartesian and polar coordinate systems. For the calculating of figure area, one can use formulas containing determinants with the coordinates of the vertices of the triangles that are parts of them. This technique, combined with the coordinates of the vertices, which are expressed in terms of the polar radius and polar angle, allows the use of trigonometric identities to simplify the resulting expressions.

Additional opportunities for the development of students' academic search abilities are provided by conditional optimization problems, where cases of coincidence and difference between global and conditional extremes are possible.

The article considers the geometric problem that was proposed at the international Olympiad for students. For this problem, the author's solution by the coordinate method is presented. In published solutions for this problem, this approach was not used. The studied problem can be formulated in terms of the problem of conditional optimization. A feature of its solution is the fact that one of the points of global maxima satisfies the existing restrictions.

Key words: coordinate method, olympiad in the discipline "mathematics".