УДК 514.182.7: 519.651

УЗАГАЛЬНЕНИЙ АЛГОРИТМ ВАРІАТИВНОГО ДИСКРЕТНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Найдиш А.В., д.т.н.,
Балюба І.Г., д.т.н.,
Верещага В.М. , д.т.н.,
Фоменко В.Г., к.ф.-м.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького (Україна)

У роботі розглядається узагальнений алгоритм варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ), як окремого напрямку прикладної геометрії зі своїм теоретичним обґрунтуванням та набором практичних методів і засобів.

Сучасні методи моделювання поділяються на дискретні та неперервні. Неперервні (класичні) методи мають на меті отримання моделюючої функції, яка, зазвичай, є аналітичною, що дозволяє виконати у процесі моделювання дотримання певних додаткових умов задачі або вимог до результату. Разом з тим, отримана функція моделювання певним чином впливає на результат моделювання, накладаючи на нього свої властивості, що спотворює кінцевий результат (іноді, навіть, значною мірою). Тому то актуальними стали методи моделювання (дискретного моделювання), що виключають пошук моделюючої функції, натомість будуючи певний алгоритм пошуку розв'язку. Побудова такого алгоритму також має певні (унікальні для кожного окремого метода дискретного моделювання) складнощі і у кожному випадку може потребувати певних додаткових умов та обмежень. При дискретному моделюванні побудова та обчислення функції замінюється геометричними побудовами, перетвореннями та ін., що може значною мірою ускладнювати розв'язання задачі. Таким чином побудова алгоритму методу дискретного моделювання (дискретного геометричного моделювання) є складною і актуальною задачею, що потребує окремих досліджень для кожного методу. Що і обумовлює актуальність розгляду цього питання для дискретного геометричного моделювання (ДГМ) та, відповідно, і для напряму варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ).

Алгоритмічно-програмне забезпечення є одною з важливих складових комплексної проблеми підвищення точності у ВДГМ і його побудова має не тільки науково-технологічний, але й методологічний аспект і зрозуміло, що високі результати моделювання гарантують

алгоритми, які найбільш повно враховують і забезпечують облік супутніх питань (стійкість та збіжність обчислювальних схем і алгоритмів; можливість введення адаптованих систем координат та ін.).

Основні вимоги до методів та алгоритмів ВДГМ визначені за результатами багаторічного і численного їх застосування в різноманітних задачах науки і техніки і в різних предметних областях, це: простота розрахункових алгоритмів; висока точність; можливість корекції розв'язку в межах, що забезпечують виконання вимог моделювання; відсутність осциляції.

Наведено узагальнений алгоритм ВДГМ вхідними даними для якого є експериментальні або статистичні дані про явище або процес, що підлягають моделюванню, та вимоги задачі моделювання щодо змісту, точності, критеріїв та ін.

Розглянуто його конкретизації на деякі формалізовані класи задач ВДГМ:

- *алгоритми згущення ДПК на основі геометричних співвідношень;*
- *моделювання на основі дискретних представлень поліноміальних функцій;*
- *алгоритми врахування апріорної інформації;*
- *алгоритми управління формою ДПК;*
- *алгоритми розв'язання систем різницевих рівнянь методу тотожностей згущення;*
- *алгоритми переходу від нерівномірної сітки до рівномірної.*

Ключові слова: варіативне дискретне геометричне моделювання (ВДГМ), геометричний образ (ГО), дискретне геометричне моделювання (ДГМ), дискретно представлена крива (ДПК), точність моделювання.

Постановка проблеми. Сучасні методи моделювання поділяються на дискретні та неперервні. Неперервні (класичні) методи мають на меті отримання моделюючої функції, яка, зазвичай, є аналітичною, що дозволяє виконати у процесі моделювання дотримання певних додаткових умов задачі або вимог до результату. Неперервні методи моделювання мають значну історію та досвід використання, відлагоджені алгоритми та досліджені обчислювальні властивості. Разом з тим, отримана функція моделювання певним чином впливає на результат моделювання, накладаючи на нього свої властивості, що спотворює кінцевий результат (іноді, навіть, значною мірою). Крім того, певні незручності та похибки у процесі моделювання виникають при дискретно-аналогових переходах (наприклад: дискретний характер вхідних даних та неперервний характер моделюючої функції та ін.), тому то актуальними стали методи моделювання (дискретного моделювання), що виключають пошук моделюючої функції, натомість будуючи певний алгоритм пошуку розв'язку. Побудова такого алгоритму також має певні (унікальні для кожного окремого метода дискретного моделювання) складнощі і у кожному випадку може потребувати певних додаткових умов та обмежень. Як правило, алгоритм неперервного методу – це обчислення визначеної у процесі моделювання аналітичної моделюючої функції, що зазвичай є обчисленням виразу при певних вхідних даних. На противагу, при дискретному моделюванні побудова та обчислення функції замінюється геометричними побудовами, перетвореннями та ін., що може значною мірою ускладнювати розв'язання задачі. Таким чином побудова алгоритму методу дискретного моделювання (дискретного геометричного моделювання) є складною і актуальною задачею, що потребує окремих досліджень для кожного методу. Що і обумовлює актуальність розгляду цього питання для дискретного геометричного моделювання (ДГМ) та, відповідно, і для напряму варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дискретне геометричне моделювання - це напрямок моделювання, де вихідні дані і результати моделювання подані у дискретній формі. При цьому виключається етап аналітичного представлення функції наближення, що підвищує точність та стійкість обчислювальних процесів. Зважаючи на це, методи ДГМ дозволяють не тільки отримати розв'язок з заданою точністю, але й виконати додаткові (можливо неформалізовані) умови задачі.

У процесі становлення та розвитку ДГМ були отримані суттєві теоретичні та прикладні результати розв'язання задач інтерполяції та апроксимації, низки прикладних задач, а саме:

- статико-геометричний метод проф. Ковальова С.М [1]. Метод отримав свій подальший розвиток і конкретизацію у багатьох дисертаціях, виконаних під керівництвом автора методу;
- мають дослідження С.М. Грибова [2] ("криві Грибова") та його учнів (запропоновані і розвинені ідеї формоутворення рівноланкових ДПК);
- результати Пугачова Є.В. [3] в дискретній інтерполяції і апроксимації, зокрема, поблизу особливих точок для багатовимірних образів.

Дослідження решти авторів розвивають вказані напрямки ДГМ або ще не мають самостійного змістовного значення.

Дослідження з ДГМ вчених Мелітопольської школи прикладної геометрії (напрям ВДГМ) розвивають *власні оригінальні ідеї* [4, 5, 6], що ґрунтуються і ув'язані з класичними положеннями геометрії і математики. Ці дослідження об'єднує загальна риса - *варіативність*: в результаті моделювання визначається не значення параметру, а інтервал його припустимих значень, з якого і обирається це значення. Варіативність розв'язку є характерною ознакою цих досліджень на відміну від згаданих раніше і дозволяє охопити дуже широке коло задач моделювання (інтерполяція, апроксимація, інтегрування та диференціювання та ін.).

Вчені Мелітопольської школи прикладної геометрії [6, 7] створили значний за об'ємом матеріал (методи та способи ВДГМ, особливості їх застосування, перелік прикладних задач, можливості їх подальшого розвитку, математичні і обчислювальні риси та особливості). Цей матеріал потребує формалізації та структуризації за змістом задач, абстрагуючись від їх прикладного наповнення, з метою побудови узагальненого обчислювального алгоритму, з взаємоузгодженими складовими для створення уніфікованого алгоритмічно-програмного забезпечення ВДГМ.

Формулювання цілей статті. Мета статті - отримати узагальнений алгоритм ВДГМ.

Основна частина. Алгоритмічно-програмне забезпечення є одною з важливих складових комплексної проблеми підвищення точності у ВДГМ [8] і його побудова має не тільки науково-технологічний, але й методологічний аспект і зрозуміло, що високі результати моделювання гарантують алгоритми, які найбільш повно враховують і забезпечують облік супутніх питань (стійкість та збіжність обчислювальних схем і алгоритмів; можливість введення адаптованих систем координат та ін.).

При побудові загального та часткових алгоритмів ВДГМ враховується наступне:

- точки наближення будуються покроковим згущенням (по певним обмеженням) вхідної ДПК без залучення моделюючої функції до досягнення заданої точності (щільності згущення);
- покрокове згущення забезпечує можливість локального моделювання та локальної корекції розв'язку;
- варіативність розв'язку, яка дозволяє обрати найбільш оптимальний розв'язок з множини припустимих та дає можливість врахувати значну кількість додаткових (можливо неформальних) вимог.

Основні вимоги до методів та алгоритмів ВДГМ визначені нами за результатами багаторічного і численного їх застосування в різноманітних задачах науки і техніки [5, 6, 7, 9] і в різних предметних областях, це: простота розрахункових алгоритмів; висока точність; можливість корекції розв'язку в межах, що забезпечують виконання вимог моделювання; відсутність осциляції.

Зазначимо, що:

- концептуальна основа ВДГМ - варіативність розв'язку (вибір шуканого результату із множини припустимих);

- геометрична основа ВДГМ - побудова смуги припустимих значень;
- обчислювальна основа ВДГМ - розв'язання систем нерівностей;
- геометричний образ (ГО) - це множина точок яка має певні метричні, позиційні, диференціально-геометричні властивості; множина може бути зв'язною - неперервний ГО (крива лінія, поверхня, геометрична фігура ...) або дискретною (графік довільного дискретного процесу).
- дискретна геометрична модель – це представлена в певній системі координат впорядкована дискретна сукупність точок ГО та (або) значень його характеристик, пов'язана з алгоритмом розв'язання певного класу задач; в дискретній геометричній моделі визначальним є алгоритм розв'язання задач, оскільки він визначає змістовну частину моделі. Маючи одну і ту ж дискретну сукупність точок, змінюючи алгоритм, можна отримати різні за змістом моделі: модель згущення; модель екстраполяції та ін.

Отже, ***узагальнений алгоритм ВДГМ:***

Вхідними даними є експериментальні або статистичні дані про явище або процес, що підлягають моделюванню, та вимоги задачі моделювання щодо змісту, точності, критеріїв та ін.

1. Геометрична постановка (геометричний зміст) задачі моделювання, її відповідність до певних геометричних схем та побудов.
2. Параметричний аналіз задачі, визначення незалежних параметрів моделювання та їх характеристик.
3. Вибір (на основі п.2) ГО та системи координат його віднесення. При цьому враховується лінійність чи нелінійність ГО, з'ясовується відповідності між параметрами задачі та характеристиками ГО, формулюються геометричні задачі, що адекватні до задачі моделювання.
4. Вибір виду моделі у відповідності до характеристик ГО та задачі моделювання.
5. Вибір алгоритмів моделювання з наявних, або розробка нових, адаптованих до розв'язання даної геометричної задачі.
6. Кодування.
7. Розрахунок і візуалізація розв'язку.
8. Аналіз результатів і (при необхідності) корекція розв'язку або повторне моделювання.
9. Оформлення результатів моделювання відповідно до поставлених вимог (заключний етап дослідження; передача результатів для подальшого використання та ін.).

Цей загальний алгоритм потребує його конкретизації на деякі формалізовані класи задач ВДГМ, абстрагуючись від прикладного їх наповнення:

1. Найпоширеніші - *алгоритми згущення ДПК на основі геометричних співвідношень,* де вибір розв'язку робиться за допомогою коефіцієнта ***μ*є[0;i],** який визначає точку розв'язку усередині його області. Ця ідея застосовується при виборі значення похідних у вузлах ДПК, точки первісної ДПК при дискретному диференціюванні та ін. При виборі значення висувається важлива вимога: узгодження з внутрішньою геометрією ДПК, що виражається сукупністю диференціально-геометричних характеристик, незалежних від системи координат.

2. *Моделювання на основі дискретних представлень поліноміальних функцій* (дискретне (простіше) розв'язання задачі неперервного моделювання). Як приклад, задача поновлення інформації (в деяких точках рівномірної сітки задані значення ординат чи інших параметрів ДПК і треба визначити відсутні значення в решті вузлів; або більшість задач формоутворення (треба сформувати ДПК за заданими вхідними даними). Найпростішими і тому найпоширенішими є дискретні представлення алгебраїчних поліномів. Розв'язання задачі ґрунтується на розв'язанні системи лінійних (зазвичай однорідних) різницевих рівнянь, серед множини значень змінних якої є заздалегідь задані.

3. *Алгоритми врахування апріорної інформації,* що визначається сукупністю значень параметрів вхідної ДПК, незалежних від системи координат (кути суміжності ланок ДПК; довжини цих ланок; перевищення середньої точки ДПК над хордою, що з'єднує сусідні точки та ін.). При цьому головне - не самі ці значення (вони змінюються у процесі згущення), а їхні співвідношення, закономірності їх зміни (як глобальні, так і локальні). Тобто, для врахування внутрішньої геометрії ДПК, необхідно звертатися до апріорної інформації..

4. *Алгоритми управління формою ДПК*, у т.ч. і запобігання осциляції. Суть в тому, що глобальна система рівнянь для визначення значень параметрів має менше число рівнянь ніж число невідомих. Зайві невідомі можна взяти як керуючі параметри, із базової системи рівнянь визначити залежності решти параметрів від цих керуючих, на значення керуючих параметрів накласти умову, що визначає форму ДПК, із многокутника (многогранника) розв'язків вибрати значення керуючих параметрів, через які і визначити решту параметрів ДПК, що гарантують бажану її форму.

5. *Алгоритми розв'язання систем різницевих рівнянь методу тотожностей згущення.* Тотожності мають кількість рівнянь приблизно в 2 рази менше кількості невідомих. Для отримання однозначного розв'язку або переходу до системи управління формою ДПК вказані системи рівнянь слід доповнити проміжними рівняннями. Зазвичай це виконується введенням найпростіших залежностей, але введення більш складних залежностей відкриває значні нові можливості моделювання.

6. *Алгоритми переходу від нерівномірної сітки до рівномірної.* Необхідність цього викликана тим, що на рівномірній сітці значно спрощуються розрахункові формули, що позитивно впливає на швидкість та якість моделювання.

Висновки. У роботі наведено узагальнений алгоритму ВДГМ, який є одною з важливих складових комплексної проблеми підвищення точності у ВДГМ, дається його обґрунтування та розглядаються характерні риси та властивості.

Наведено класифікацію типових класів задач та відповідних алгоритмів та вказано на їхні характерні властивості та переваги.

Література

1. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций : дис. ... д-ра техн. наук : 05.01.01 / МАИ. Москва, 1986. 348 с.
2. Грибов С.М. Дискретна геометрія інтерактивного конструювання кінематичних поверхонь на основі скінченних сум : дис. ... д-ра техн. наук : 05.01.01. Київ, 1994. 302 с.
3. Пугачов Є.В. Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки : дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. Київ, 2001. 324с.
4. Найдиш В.М., Найдиш А.В. Геометричні аспекти дискретної інтерполяції. *Праці Тавр. держ. агротехн. академії.* Мелітополь: ТДАТА, 2004. Вип. 4. Т. 23. С. 3-8.
5. Найдиш В.М. Дискретне геометричне моделювання: сутність, особливості, різновиди. *Праці Тавр. держ. агротехн. академії*. Мелітополь, 2004. Вип. 4. Т. 24. С. 100-105.
6. Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М., Спірінцев Д.В. Варіативне дискретне геометричне моделювання. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки*. Мелітополь, 2018. Вып.11. С. 108-114.
7. Найдиш А.В. Досвід та перспективи діяльності мелітопольської школи прикладної геометрії. *Геометрическое моделирование и компьютерные технологии: теория, практика, образование*: материалы 6 международной научно-практической конф. (21-24 апреля 2009г.). Харків: ХГУПТ, 2009. С. 15-22.
8. Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М., Спірінцев Д.В. Проблема підвищення точності у варіативному дискретному геометричному моделюванні. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вып.14. С. 148-155.
9. Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М., Спірінцев Д.В. Науково-методологічні основи варіативного дискретного геометричного моделювання. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2018. Вып.13. С. 114-123.

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ВАРИАТИВНОГО ДИСКРЕТНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Найдыш А.В., Балюба И.Г., Верещага В.М., Фоменко В.Г.

В работе рассматривается обобщенный алгоритм вариативного дискретного геометрического моделирования (ВДГМ), как отдельного направления прикладной геометрии со своим теоретическим обоснованием и набором практических методов и средств.

Современные методы моделирования делятся на дискретные и непрерывные. Непрерывные (классические) методы основаны на получении моделирующей функции, которая обычно является аналитической, что позволяет в процессе моделирования соблюдать определенные дополнительные условия задачи или требования к результату. Вместе с тем, полученная моделирующая функция определенным образом влияет на результат моделирования, накладывая на него свои свойства, что искажает конечный результат (иногда даже в значительной степени). Поэтому, актуальными стали методы моделирования (дискретного моделирования), исключающие поиск моделирующей функции, вместо этого строится определенный алгоритм поиска решения. Построение такого алгоритма имеет определенные (уникальные для каждого отдельного метода дискретного моделирования) сложности, и может потребовать определенных дополнительных условий и ограничений. При дискретном моделировании построение и вычисление функции заменяется геометрическими построениями и преобразованиями, что может в значительной степени усложнять решение задачи. Таким образом, построение алгоритма метода дискретного моделирования (дискретного геометрического моделирования) является сложной и актуальной задачей, требующей отдельных исследований в рамках каждого из методов. Это и обусловливает актуальность рассмотрения данного вопроса для дискретного геометрического моделирования (ДГМ) и, соответственно, для направления вариативного дискретного геометрического моделирования (ВДГМ).

Алгоритмическое программное обеспечение является одной из важных составляющих комплексной проблемы повышения точности в ВДГМ и его построение имеет не только научно-технологический, но и методологический аспект. Высокие результаты моделирования гарантируют алгоритмы, которые наиболее полно учитывают и обеспечивают учет сопутствующих вопросов (устойчивость и сходимость вычислительных схем и алгоритмов, возможность введения адаптированных систем координат и т.д.).

Основные требования к методам и алгоритмам ВДГМ определены по результатам многолетнего и многочисленного их применения *в различных задачах науки и техники, а так же в различных предметных областях. В основном, это: простота расчетных алгоритмов; высокая точность; возможность коррекции решения в пределах, обеспечивающих выполнение требований моделирования; отсутствие осцилляций.*

В работе приведен обобщенный алгоритм ВДГМ, исходными данными для которого являются экспериментальные или статистические данные о явлении или процессе, подлежащему моделированию, а так же требования задачи моделирования по содержанию, точности, критериям и т.д.

Рассмотрены его конкретизации на некоторые формализованные классы задач ВДГМ:

– алгоритмы сгущения ДПК на основе геометрических соотношений;

– моделирование на основе дискретных представлений полиномиальных функций;

– алгоритмы учета априорной информации;

– алгоритмы управления формой ДПК;

– алгоритмы решения систем разностных уравнений методами тождеств сгущения;

– алгоритмы перехода от неравномерной сетки к равномерной.

Ключевые слова: вариативное дискретное геометрическое моделирование (ВДГМ), геометрический образ (ГО), дискретное геометрическое моделирование (ДГМ), дискретно представлена кривая (ДПК), точность моделирования.

GENERALIZED ALGORITHM FOR VARIABLE DISCRETE GEOMETRIC MODELING

Naydysh A., Balyuba I., Vereshchaga V., Fomenko V.

The paper considers a generalized algorithm for variable discrete geometric modeling (VDGM), as a separate direction of applied geometry with its theoretical justification and a set of practical methods and tools.

Modern modeling methods are divided into discrete and continuous. Continuous (classical) methods are based on the receipt of a modeling function, which is usually analytical, which allows us to observe certain additional conditions of the problem or requirements for the result in the modeling process. At the same time, the obtained modeling function in a certain way affects the simulation result, imposing its own properties on it, which distorts the final result (sometimes even to a large extent). Therefore, modeling methods (discrete modeling) that exclude the search for a model-

ing function have become relevant, instead a specific algorithm for finding a solution is built. The construction of such an algorithm has certain (unique for each individual discrete modeling method) difficulties, and may require certain additional conditions and restrictions. In discrete modeling, the construction and calculation of a function is replaced by geometric constructions and transformations, which can greatly complicate the solution of the problem. Thus, the construction of the algorithm of the discrete modeling method (discrete geometric modeling) is a complex and urgent task requiring separate studies within each of the methods. This determines the relevance of considering this issue for discrete geometric modeling (DGM) and, accordingly, for the direction of variable discrete geometric modeling (VDGM).

Algorithmic software is one of the important components of the complex problem of improving accuracy in the VDGM and its construction has not only scientific and technological, but also a methodological aspect. High simulation results are guaranteed by the algorithms that most fully take into account and ensure that related issues are taken into account (stability and convergence of computational schemes and algorithms, the possibility of introducing adapted coordinate systems, etc.).

The basic requirements for the methods and algorithms of VDGM are determined by the results of many years of their numerous application in various problems of science and technology, as well as in various subject areas. Basically, these are: simplicity of computational algorithms; high accuracy; the ability to correct the solution to the extent that the simulation requirements are met; lack of oscillations.

The paper presents a generalized VDGM algorithm, the initial data for which are experimental or statistical data on the phenomenon or process to be simulated, as well as the requirements of the modeling problem in terms of content, accuracy, criteria, etc.

Its concretization to some formalized classes of problems of the VDGM are considered:

– DPC thickening algorithms based on geometric relationships;
– modeling based on discrete representations of polynomial functions;
– algorithms for accounting a priori information;
– DPC form control algorithms;
– algorithms for solving systems of difference equations by methods of condensation identities;
– algorithms for the transition from an uneven grid to a uniform one.

Key words: variable discrete geometric modeling (VDGM), geometric image (GO), discrete geometric modeling (DGM), discretely presented curve (DPC), modeling accuracy.