

УДК 514.18

КОНСТРУЮВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СІТОК ТА ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНИХ В-СПЛАЙНІВ

Аушева Н.М., д.т.н.,

Данько Ю.А.

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

(Україна)

Моделювання геометричних об'єктів у ізотропному просторі дозволяє спростити ряд обчислень, що пов'язані з розрахунками диференціальних характеристик. Для створення можливостей керування криволінійними контурами об'єктів доцільно застосовувати параметричні криві на основі характеристичних багатокутників. Для кожного виду таких кривих існують свої обмеження стосовно розрахунку координат та довжин у ізотропному просторі. Дослідження стосовно моделювання ізотропних В-сплайнів та на їх основі сіток та поверхонь носять локальний характер і потребують більш детального розгляду.

В роботі пропонується моделювати ізотропні В-сплайни на основі рекурсивних формул Кокса-де Бура. Координати точок для сплайну розраховуються на основі рівності нулю довжин сторін характеристичних багатокутників. Наводяться приклади побудованих сплайнів для різних видів вузлових векторів. Показано, що деякі види вузлових векторів не надають можливість проходження кривої через початкову і кінцеву точку багатокутників. В цьому випадку необхідно проводити корегування вузлового вектора.

Авторами роботи розроблено алгоритм моделювання дискретних сіток та поверхонь на основі В-сплайнів. Всі розрахунки проводяться у комплексному просторі. При відображенні геометричних об'єктів проводиться виділення дійсної частини та перехід до дійсного простору. В якості прикладу наведено візуалізацію сітки та поверхні на основі відкритого рівномірного вузлового вектору.

Для дослідження ізотропних дискретних кривих, сіток на поверхонь на основі В-сплайнів було створено програмне забезпечення на С# під платформу .Net Core. Подальші дослідження пов'язані з дослідженням впливу вузлових векторів на базис ізотропного В-сплайну та поверхонь.

Ключові слова: ізотропна крива, В-сплайн, дискретні сітки, дискретні поверхні на основі ізотропних сплайнів.

Постановка проблеми. Конструювання сіток та поверхонь в ізотропному просторі має дуже велику кількість обмежень, які пов'язано зі складністю їх визначення. Застосування сплайнових методик дозволяє надати можливість розробнику керувати цими геометричними об'єктами за рахунок зміни напрямної кривою. В теорії сплайнів є криві, які мають властивість змінювати порядок кривої без зміни кількості базових вершин та мають неглобальні базисні функції – це В-сплайни [1]. Даний тип сплайнів дає більш гнучкий апарат для керування формою кривої, але дослідження щодо його застосування в ізотропному просторі дуже обмежені.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделювання періодичних В-сплайнів на площині було досліджено авторами роботи [2] та було розроблено спосіб моделювання ортогональних і ізотермічних сіток на площині для сегментів. Багато досліджень було присвячено моделюванню мінімальних поверхонь на основі кривих Безьє та дробово-раціональних кривих [3, 4]. Моделюванням мінімальних поверхонь засобами комплексного аналізу для розв'язування задач формоутворення поверхонь технічних форм займалися учні проф. Пилипаки С.Ф. [5, 6, 7].

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є розробка способу конструювання дискретних сіток і поверхонь на основі ізотропних В-сплайнів.

Основна частина. Будемо визначати В-сплайн у вигляді [1]:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) \mathbf{r}_i, t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, 2 \leq k \leq n+1, \quad (1)$$

де $N_{i,k}(t)$ – нормалізовані функції базису В-сплайну.

Для i -ої нормалізованої функції базису порядку k функції базису $N_{i,k}(t)$ визначаються рекурсивними формулами Кокса-де Бура:

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}, \quad (2)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i) N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (3)$$

де x_i - елементи вузлового вектору.

Ізотропний В-сплайн на площині будемо будувати на основі ізотропності ланок характеристичних багатокутників, тобто:

$$|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i| = 0, \quad i = 1..n+1, \quad (4)$$

якщо r_i задаються комплексними числами.

На площину буде відображатися дійсна частина побудованої кривої. В залежності від заданого вузлового вектору можна одержати

відкриті, рівномірні періодичні та нерівномірні сплайни [1]. Дослідження ізотропних В-сплайнів вказаних типів необхідно проводити додатково.

Ізотропний В-сплайн будемо застосовувати у якості напрямної кривої для моделювання поверхонь і сіток у дискретному вигляді. Запишемо наступний алгоритм:

- задамо вузловий вектор $[x_1 x_2 \dots x_{n+1}]$;
- у рівняннях (2) та (3) введемо заміну $t = u + v\mathbf{i}$;
- будемо змінювати параметр v_{j1} на інтервалі $[0,1]$;
- для всіх v_{j1} на кожному інтервалі $x_i \leq u < x_{i+1}$ визначимо значення i -ої нормалізованої функції базису порядку k функції базису $N_{i,k}(u, v_{j1})$ на основі рекурсивних формул Кокса-де Бура:

$$N_{i,1}(u, v_{j1}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \leq u < x_{i+1} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}, \quad (5)$$

$$N_{i,k}(u, v_{j1}) = \frac{(u + v_{j1}\mathbf{i} - x_i)N_{i,k-1}(u, v_{j1})}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u + v_{j1}\mathbf{i})N_{i+1,k-1}(u, v_{j1})}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (6)$$

де x_i - елементи вузлового вектору;

- рівняння нормалізованої функції базису $N_{i,k}(u, v_{j1})$ для кожного параметру u_{j2} підставимо у вираз:

$$\mathbf{r}(u_{j2}, v_{j2}) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(u_{j2}, v_{j1}) \mathbf{r}_i; \quad (7)$$

- виділимо дійсну частину від виразу (7) $r_{Re}(u_{j2}, v_{j1}) = Re(\mathbf{r}(u_{j2}, v_{j1}))$. Будемо мати точку сітки або поверхні у дійсному просторі \mathbf{R}^2 або \mathbf{R}^3 .

Для моделювання дискретних ізотропних В-сплайнів, сіток та поверхонь було розроблено програмне забезпечення мовою програмування C# під платформу .Net Core, використовуючи технологію ASP.Net Core MVC, в середовищі Rider 2020 з використанням мови програмування JS та бібліотеки Plotly.js.

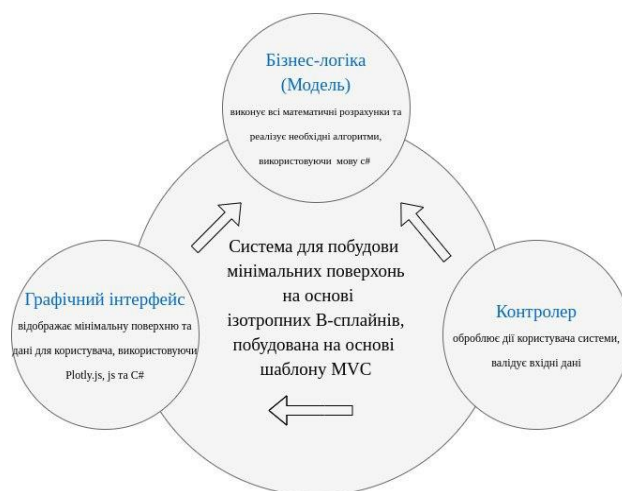


Рис. 1. Архітектура програмного забезпечення

На рис.1. відображено архітектуру програмного забезпечення.

Приклад 1. Побудуємо плоский ізотропний В-сплайн якщо задані такі значення $x_0 = 1.0 + 2.0i$, $x_{1Re} = 2.0$, $x_{2Re} = 4.0$, $x_{3Re} = 7.0$, $y_0 = 3.0 + 3.0i$, $y_{1Re} = 1.0$, $y_{2Re} = 3.0$, $y_{3Re} = 1.0$. Невідомі уявні складові точок будемо знаходити на основі рівності нулю ланок характеристичного багатокутника, тобто на основі виразу (4). Одержимо: $x_{1Im} = 4.0$, $y_{1Im} = 4.0$, $x_{2Im} = 2.0$, $y_{2Im} = 6.0$, $x_{3Im} = 4.0$, $y_{3Im} = 9.0$. Розрахунок нормалізованих функцій будемо виконувати на основі рекурсивних формул Кокса-де Бура.

Побудуємо В-сплайни, якщо задані різні значення вузлових векторів на основі розрахованих точок характеристичного чотирикутника.

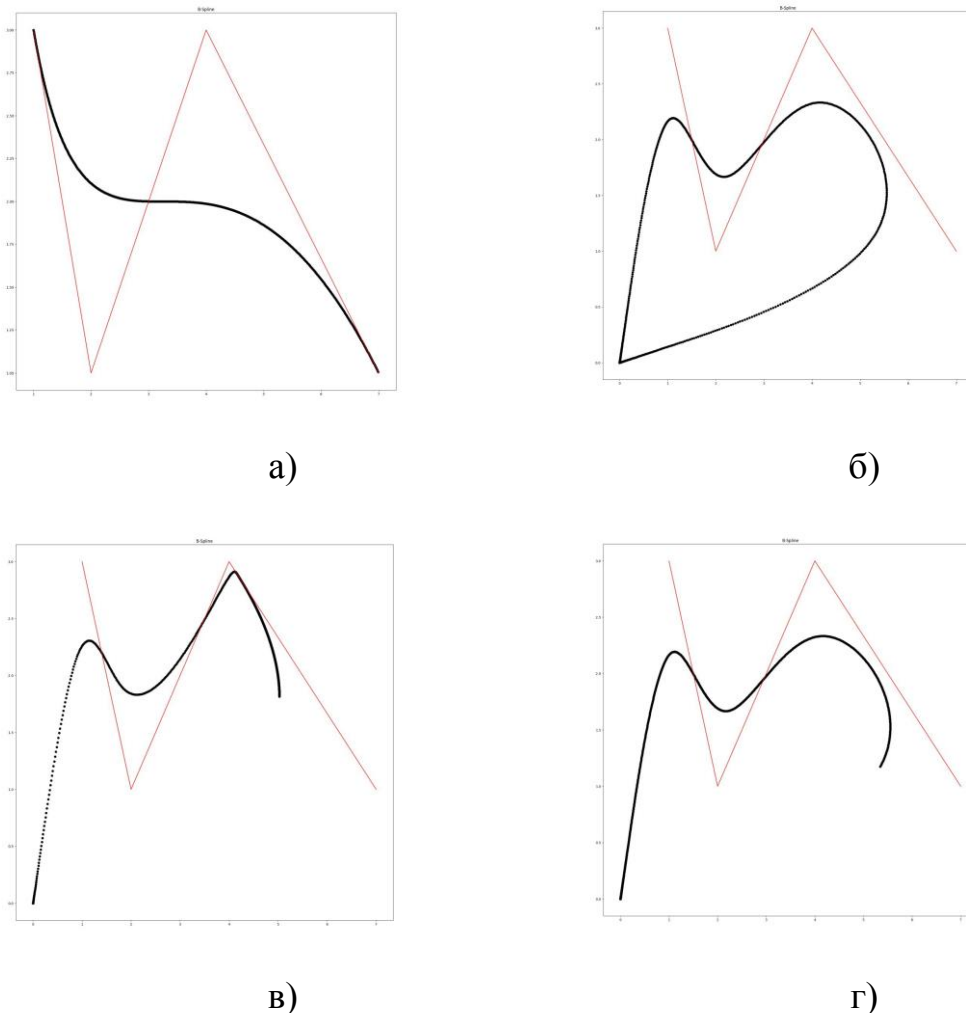


Рис. 2. В-сплайн на основі різних вузлових векторів а) $[0,0,0,0,1,1,1,1]$; б) $[0,0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6,0,7]$; в) $[0,0,0,0,4,0,9,0,15,0,27,0,3,3,5,5]$; г) $[0,0,0,2,0,4,0,6,0,8,1,1,2,1,4]$

На рис. 2,а відображено криву на основі відкритого рівномірного вузлового вектору $[0,0,0,0,1,1,1,1]$. У відкритого В-

сплайну перша та остання точки кривої співпадають з відповідними точками многокутника. На рис. 2,б та рис.2,г відображено криві, що побудовані на основі рівномірних вузлових векторів $[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7]$ та $[0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4]$. На рис.2,в відображено криву, що побудована на основі нерівномірного вузлового вектора $[0.0, 0.04, 0.09, 0.15, 0.27, 0.3, 3.5, 5]$. У наведених прикладах перша і остання точки сплайну не співпадають з точками многокутника. Для завдання сплайну, який би проходив через вказані точки необхідно проводити корекцію вузлового вектору.

Приклад 2. Побудуємо сітку та поверхню на основі ізотропного В-сплайна 3-го степеня для вузлового вектору $[0,0,0,0,1,1,1,1]$.

При побудові сітки застосуємо точки характеристичного чотирикутника, що розраховані у прикладі 1. Сітку, що побудовано на основі наведеного вище алгоритму, відображено на рис.3. Для моделювання поверхні необхідно розрахувати тривимірний ізотропний В-сплайн. Скористаємось методом деформації, що був запропонований для кривих Безьє [3]. Дискретну поверхню відображено на рис.4.

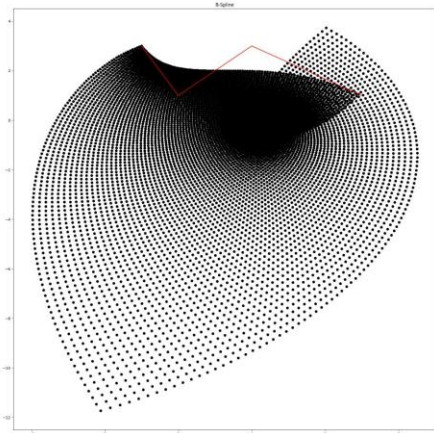


Рис.3. Дискретна сітка на основі ізотропного В-сплайну з вузловим вектором $[0,0,0,0,1,1,1,1]$

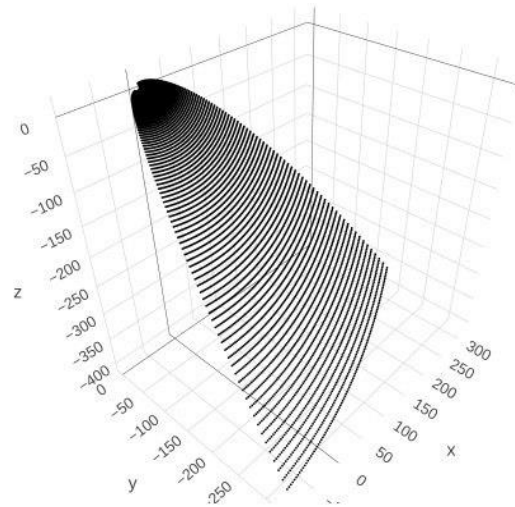


Рис.4. Дискретна поверхня на основі ізотропного В-сплайну з вузловим вектором $[0,0,0,0,1,1,1,1]$

Висновки. Проведені дослідження показали, що ізотропні В-сплайни можна застосовувати для формування сіток та поверхонь у ізотропному просторі. Наведено узагальнений алгоритм моделювання сіток та поверхонь на основі методу Кокса-де Бура у просторах \mathbf{R}^2 та \mathbf{R}^3 . Подальші дослідження пов'язані з дослідженням впливу вузлових векторів на базис ізотропного В-сплайну та поверхонь.

Література

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. Москва: Мир, 2001. 604 с.
2. Аушева Н.М., Гурін А.Л. Моделювання плоских сіток на основі ізотропних В-сплайнів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*, 2015р. №3(54). С.528-533.
3. Ausheva N, Olevskiy V., Olevska Y. Modeling of Minimal Surface Based on an Isotropic Bezier Curve of Fifth Order. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics (JGSP)*. Bulgarian Academy of Sciences, 2019. Vol. 52. P. 1-15.
4. Andrianov I.V., Ausheva N.M., Olevska Y.B., Olevskiy V.I. Surfaces Modelling Using Isotropic Fractional-Rational Curves. *Journal of Applied Mathematics*. Hindawi, 2019. Vol. 2019, Article ID 5072676, 13 p.
5. Пилипака С.Ф., Муквич М.М., Захарова Т.М. Знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній на поверхні уявного гіперболоїда та утворення мінімальних поверхонь. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки*. Мелітополь, 2019. № 14. С. 156–163.
6. Voytyuk V., Pylypaka S., Kalinichenko R., Mukvich M. Investigation of Movement of Grains in Drum Dryer with Ir-Energy Supply on Sloping, Ruled Minimal Surface. ТЕКА. *Commission of Motorization and Energetics in Agriculture*. 2018. Vol. 18. No. 3. P. 5–10.
7. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / Київський національний університет будівництва і архітектури. Київ, КНУБА. 2007. 20 с.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЕТЕЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ИЗОТРОПНЫХ В-СПЛАЙНОВ

Аушева Н.Н., Данько Ю.А.

Моделирование геометрических объектов в изотропном пространстве позволяет упростить ряд вычислений, связанных с расчетами дифференциальных характеристик. Для возможности управления криволинейными контурами объектов целесообразно применять параметрические кривые на основе характеристических

многоугольников. Для каждого вида таких кривых существуют свои ограничения относительно расчета координат и длин в изотропном пространстве. Исследования в направлении моделирования изотропных B-сплайнов и на их основе сетей и поверхностей носят локальный характер и требуют более детального рассмотрения.

В работе предлагается моделировать изотропные B-сплайны на основе рекурсивных формул Кокса- де Бура. Координаты точек для сплайна рассчитываются на основе равенства нулю длин сторон характеристических многоугольников. Приводятся примеры построенных сплайнов для разных видов узловых векторов. Показано, что некоторые виды узловых векторов не дают возможность прохождения кривой через начальную и конечную точку многоугольников. В этом случае необходимо проводить корректировки узлового вектора.

Авторами работы разработан алгоритм моделирования дискретных сетей и поверхностей на основе B-сплайнов. Все расчеты производятся в комплексном пространстве. При отображении геометрических объектов проводится выделение действительной части и переход к действительному пространству. В качестве примера приведены визуализация сетки и поверхности на основе открытого равномерного узлового вектора.

Для исследования изотропных дискретных кривых, сеток и поверхностей на основе B-сплайнов было создано программное обеспечение на C # под платформу .Net Core. Дальнейшие исследования связаны с исследованием влияния узловых векторов на базис изотропной B-сплайна и поверхностей.

Ключевые слова: изотропная кривая, B-сплайн, дискретные сетки, дискретные поверхности на основе изотропных сплайнов.

DESIGNING DISCRETE NETWORKS AND THE SURFACE ON THE BASIS OF ISOTROPIC B-SPLINE

Ausheva N., Danko Yu.

Modeling geometric objects in isotropic space allows us to simplify a number of calculations related to the calculation of differential characteristics. To create the ability to control the curved contours of objects, it is advisable to apply parametric curves based on characteristic

polygons. For each type of such curves, there are limitations to the calculation of coordinates and lengths in isotropic space. Studies on modeling isotropic B-splines and based on them grids and surfaces are local in nature and require more detailed consideration.

The paper proposes to model isotropic B-splines based on the recursive Cox de Boer formulas. The coordinates of the points for the spline are calculated based on the equal to zero side lengths of the characteristic polygons. Examples of constructed splines for different types of nodal vectors are given. It is shown that some types of nodal vectors do not allow the curve to pass through the start and end points of polygons. In this case, it is necessary to carry out adjustments to the nodal vector.

The authors of the work developed an algorithm for modeling discrete grids and surfaces based on B-splines. All calculations are made in a complex space. When displaying geometric objects, the selection of the real part and the transition to the real space are carried out. As an example, visualization of the grid and surface based on an open uniform nodal vector is given.

To research isotropic discrete curves, grids and surfaces based on B-splines, C # software was created for the .Net Core platform.

Further research is related to the study of the influence of nodal vectors on the basis of an isotropic B-spline and surfaces.

Keywords: isotropic curve, B-spline, discrete grids, discrete surfaces based on isotropic splines.