

UDC 514.74

INTERPOLATION BY RATIONAL SURFACES OF BEZIER AND NURBS-SURFACES

Badayev Yu.I., Doctor of Technical Sciences,
Lagodina L.P., Ph.D.

National Technical University of Ukraine «KPI name Igor Sikorsky» (Kyiv, Ukraine)

Relevance. Rational Bezier surfaces and NURBS-surfaces are widely used in modeling curvilinear objects due to the great flexibility and efficiency of the method. Therefore, it is sense to develop an interpolation method by these surfaces

Method. The work is devoted to the development of a new approach to interpolation surfaces, represented by a set of discrete points. The analytical description of the desired surfaces is implemented a rational Bezier surfaces and a NURBS-surfaces. To solve this problem, two approaches are proposed. The first approach is that the weights of the control points are set in advance and then the coordinates of the points of the interpolating rational Bezier surface as well as the NURBS-surface are calculated. The second approach is that the coordinates of the control points are set in advance and then the weights of the control points of Bezier surface as well as the NURBS-surface are calculated. At the beginning of the process, are set only coordinates, but also parameters are set to a discrete points, that is, each point has the following definition: $T(x,y,z,u,v)$ in the three-dimensional space, where u,v – parameters. To solve the interpolation problem, a system of linear equation is created in which each equation reflects the equality between the analytical formula for a surface and a given point. Moreover, the number of interpolated points must be number of control points. Thus, we have a system of N linear equations, where N is the number of control points.

Results. Two methods of interpolation of a points series by rational Bezier surfaces and NURBS-surfaces. were developed.

Conclusions. The test cases carried out of using computer programs and calculated of results confirm the validity of the proposed methods.

Keywords: interpolation, rational Bezier surfaces, NURBS-surfaces.

Formulation of the problem. To date, when constructing surfaces in various automation systems, rational Bezier surfaces and NURBS surfaces are often used. It is a very flexible tool that allows you to create smooth splines of any order, shapes, and also easy to carry out local control over

the surfase.

The surfase is represented in a parametric form and for controlling the shape of the surfase using control points and weight coefficients of nodes [1].

Rational nonuniform Bezier surfases refer to NURBS and are based on Bernshtein's basic functions. The practical application of NURBS surfases is very diverse, for example: they are often used in computer graphics to draw smooth surfases that accurately describe the shape of the three-dimensional objects depicted in drawings , for the task of the surfases of building the surfaces of rotation, as well as the simulation of the trajectories of motion on surfase and space in the course of time.The parametric representation of the surfases allows it to be used in multidimensional spaces. Interpolation of these surfases enables them to be used in modeling objects with complex geometric shapes.

Analysis of recent publications. In work [1] on page 135 offers an algorithm for interpolation with NURBS curves, which is based on the fact that control points in the second stage are projected onto a curve and these new points are taken as new control points. In practice, such an algorithm is difficult to implement and achieves precise results. In the works [2] and [3] it does not specify how to calculate the weight of control points, which prevents the construction of an algorithm for interpolation.

The purpose of the article. The purpose of the article is to develop real algorithms for interpolation with rational Bezier surfases and NURBS surfases for a given point series.

Main part.

The Rational surface of Besier is determined by a formula [1]:

$$r = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij}} \quad , \quad (1)$$

where

$$B_i^n(v) = \sum_{i=0}^n K_i^n v^i (1-v)^{(n-i)} \quad ;$$

$$B_j^m(u) = \sum_{j=0}^m K_j^m u^j (1-u)^{(m-j)} \quad ;$$

$$K_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!} \text{ - binomial coefficient;}$$

p - control points of surface;

w - weight control points of surface.

The NURBS-surface is determined by the formula:

$$r = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{ik}^n(v) N_{jp}^m(u) w_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{ik}^n(v) N_{jp}^m(u) w_{ij}} ,$$

where $N_{ik}(u)$ normalized basic power function degrees k .

Let given point series R_l , $l=1,2,3,\dots$. P. Acceptable for each point specific parameters u_l, v_l . We will have a point series $R_l(x_l, y_l, z_l, u_l, v_l)$. We will interpolate the given point series of the surface (1). To do this we will create an equation system:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij}} - R_l \right] = 0, \quad i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m. \quad (2)$$

Or

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} p_{ij} - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} R_l \right] = 0, \quad (3)$$

$$i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m.$$

As you can see, the number of interpolated points should not exceed the number of control points of the surface, i.e. $l=(n+1)x(m+1)$. Therefore, the same number of linear equations.

As an example, we take the rational Bezier surface built by curves of the second degree:

$$B^2_0 = 1.0,$$

$$B^2_1 = 2.0,$$

$$B^2_2 = 1.0.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} &= w_{00}(1-v)^2 [w_{00}(1-u)^2 + 2w_{01}(1-u)u + w_{02}u^2] \\ &+ 2w_{10}(1-v)v [w_{10}(1-u)^2 + 2w_{11}(1-u)u + w_{12}u^2] \\ &+ w_{20}v^2 [w_{20}(1-u)^2 + 2w_{21}(1-u)u + w_{22}u^2]. \end{aligned} \quad (4)$$

for

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} p_{ij}$$

will be the same as (4), but instead of w_{ij} you need to set $(p_{ij} w_{ij})$.

Conclusions:

Two methods of interpolation of point row are worked out by the rational surface of Bezier and NURBS - surface.

Test examples by means of the computer program, that validify offer methods, are conducted.

Referenses

1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М: Физматлит, 2002. 272с.
2. Юдин О.А. Интерполяция NURBS-кривыми в многомерном пространстве. Наукові ВНТУ, 2008. № 4. С.1-4.
3. Юдин О.А, Расширение интерполяции по Лагранжу с использованием кривых Безье: Нові технології, 2005. №3(9). С.117-120.
4. David F. Rogers, Rae A. Earnshav(editor) «*State of the Art in Computer Graphics*»-*Visualization and Modeling*», 1991. P.225-269.
5. Кветний Р.Н. Методи комп'ютерних обчислень. Вінниця: ВДТУ, 2001. 148 с.
6. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. М:Бином. Лаборатория знаний, 2007. 423с.
7. Бадаев Ю.І., Блиндарук А.О. Керування кривою NURBS-кривою 3-го порядку за допомогою ваги контрольних точок. *Водний транспорт: зб. наукових праць Київської державної академії водного транспорту*. 2014. №3(21). С.103-105.
8. Бадаев Ю.І., Блиндарук А.О. Можливості локальної модифікації гладкої NURBS-кривої. *Современные информационные и электронные технологии: XV Международная научно-практическая конференция: научн. труды*. Одесса, 2014. Т.1. С. 26-27.
9. Бадаев Ю.І., Блиндарук А.О. Комп'ютерна реалізація проектування криволінійних обводів методом NURBS-технологій вищих порядків. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки*. Мелітополь, 2014. С.3-6.

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОВЕРХНЯМИ БЕЗЬЄ І NURBS-ПОВЕРХНЯМИ

Бадаев Ю.І. , Лагодіна Л.П.

Раціональні поверхні Безье і NURBS-поверхні широко застосовуються в моделюванні криволінійних об'єктів завдяки великій гнучкості і працездатності метода. Тому актуальним є розробка

методу інтерполяції цими поверхнями дискретного ряду точок в тривимірному просторі.

Робота присвячена розробці нового підходу до інтерполяції раціональною поверхнею Безьє, поданої множиною дискретних точок.

Аналітичний опис шуканої поверхні реалізується із застосуванням раціональної поверхні Безьє і NURBS-поверхні. Для розв'язання цієї задачі пропонується два підходи.

Перший підхід полягає в тому, що заздалегідь задаються ваги контрольних точок і далі розраховуються координати контрольних точок інтерполюючій раціональній поверхні Безьє а також NURBS-поверхні. Другий підхід полягає в тому, що заздалегідь задаються координати контрольних точок і далі розраховуються ваги контрольних точок поверхні Безьє а також NURBS-поверхні.

На початку процесу дискретному ряду точок задаються не тільки координати, але й також параметри, тобто кожна точка має наступне визначення: $T(x, y, z, u, v)$ в тривимірному просторі, де u, v -параметри. Для розв'язання задачі інтерполяції створюється система лінійних рівнянь, в якому кожне рівняння відображає рівність між аналітичною формулою поверхні і заданою точкою.

При цьому кількість інтерпольованих точок дорівнює кількості контрольних точок поверхні а також кількості лінійних рівнянь. Таким чином маємо систему із N лінійних рівнянь, де N – кількість інтерпольованих точок і кількість контрольних точок поверхні. Невідомими є контрольні точки поверхні або в другому випадку ваги контрольних точок поверхні.

Розроблені два метода інтерполяції\ точкового ряду раціональною поверхнею Безьє і NURBS-поверхнею.

Проведені тестові приклади за допомогою комп'ютерної програми, які підтверджують достовірність запропонованих методів.

Ключові слова: інтерполяція, раціональні поверхні Безьє, NURBS- поверхні.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ БЕЗЬЕ И NURBS-ПОВЕРХНОСТЯМИ.

Бадаев Ю.И., Лагодина Л.П.

Рациональные поверхности Безье и NURBS- поверхности широко применяются в моделировании криволинейных объектов благодаря большой гибкости и работоспособности метода. Поэтому

актуальной является разработка метода интерполяции этими поверхностями дискретного ряда точек в трехмерном пространстве.

Работа посвящена разработке нового подхода к интерполяции рациональной поверхностью Безье, поданной множеством дискретных точек. Аналитическое описание искомой поверхности реализуется с применением рациональной поверхности Безье и NURBS-поверхности. Для решения этой задачи предлагается два подхода.

Первый подход заключается в том, что заранее задаются веса контрольных точек и дальше рассчитываются координаты контрольных точек интерполирующей рациональной поверхности Безье, а также NURBS-поверхности. Вторым подходом является в том, что загодя задаются координаты контрольных точек и дальше рассчитываются веса контрольных точек поверхности Безье, а также NURBS-поверхности.

В начале процесса дискретному ряду точек задаются не только координаты, но и также параметры, то есть каждая точка имеет следующее определение: $T(x, y, z, u, v)$ в трехмерном пространстве, где u, v - параметры.

Для решения задачи интерполяции создается система линейных уравнений в котором каждое уравнение отображает равенство между аналитической формулой поверхности и заданной точкой.

При этом количество интерполируемых точек равняется количеству контрольных точек поверхности, а также количеству линейных уравнений. Таким образом имеем систему из N линейных уравнений, где N - количество интерполируемых точек и количество контрольных точек поверхности. Неизвестными являются контрольные точки поверхности или во втором случае веса контрольных точек поверхности.

Разработаны два метода интерполяции точечного ряда рациональной поверхностью Безье и NURBS-поверхностью.

Проведены тестовые примеры с помощью компьютерной программы, которые подтверждают достоверность предложенных методов.

Ключевые слова: интерполяция, рациональные поверхности Безье, NURBS - поверхности.