УДК 514.18

АНАЛІЗ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР З ВИКОРИСТАННЯМ ОДНО - ТА ДВОРОЗМІРНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТРИЦЬ

Верещага В.М., д.т.н.,
Павленко О.М., к.т.н.,
Балюба І.Г., д.т.н.,
Лебедєв В.О., к.т.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії ,
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького (Україна)

Визначено, що операції над композиційними матрицями (компоматрицями) здійснюються через виконання операцій над їхніми елементами і у певній відповідності до геометричних перетворень, які застосовані до геометричних фігур (ГФ), що цими компоматрицями описані.

Досліджено, що для однопараметричних ГФ (геометричних фігур) однорозмірні компоматриці можна упорядкувати як у рядки, так і у стовпці, надається позначення однорозмірних компоматриць точкових і параметричних.

Проаналізовано, що для однієї вихідної ГФ за різних алгоритмів її параметризації будуть одержані різні розв'язки – компоматриці параметричні.

Визначено умови щодо дорівнювання двох однорозмірних компоматриць, що побудовані для однієї вихідної ГФ і для конгруентних ГФ.

Розглядаються правила складання і позначення дворозмірних дійсних компоматриць для вихідної чотирикутної та трикутної геометричних фігур. Вказано на умови появи в них пустих елементів, обґрунтовуються правила оперції з пустими елементами.

На прикладах показано, що обрис запису дійсних елементів компоматриць співпадає з обрисом сегменту вихідної ГФ, для якої ця компоматриця складена, при цьому, вказане стосується як компоматриць точкових, так і компоматриць параметричних.

Із застосуванням методу рухомого симплексу, наведено приклад формування дворозмірної компоматриці геометричної фігури, обґрунтовується обрання її розміру та складання на її основі точкового рівняння точкового поліному, що інтерполює вихідну ГФ, для якої складено цю дворозмірну компоматрицю.

Також визначено, що навіть, коли обрис записів дійсних елементів дворозмірної компоматриці не є прямокутним, вона все *одно вважається прямокутною за розміром, який визначається найбільшою кількістю елементів у стовпцю та рядку.*

Встановлено ознаки рівності двох дворозмірних компоматриць. Встановлено, що вони будуть рівними лише у випадку, коли складені для однієї вихідної геометричної фігури за одного алгоритму параметризації її складових. Також встановлено ознаки конгруентності двох геометричних фігур за їхніми дворозмірними композиційними матрицями.

Ключові слова: точковий поліном, композиційні матриці, уніфікація геомтричних фігур, характеристичні функції, геометричний спосіб інтерполяції.

Постановка проблеми. Існуюча теорія матриць [4,7,9] розроблена для опису алгебраїчних об'єктів. Через це, у наших дослідженнях традиційні матриці названо нами: «алгебраїчні матриці». За використання алгебраїчних матриць достатньо складно описувати геометричні об'єкти. Методи композиційної геометрії спрямовані на аналітичну формалізацію операцій з геометричними об'єктами. Опис аналітичних операцій з геометричними об'єктами значно спрощується і прискорюється за використання спеціально створених для цього матриць, які нами названо – «композиційними». Розробка теорії композиційних матриць (компоматриць) є нагальною проблемою, на розв'язання якої і спрямоване дане дослідження.

Другою причиною, яка викликає необхідність розвитку теорії компоматриць є те, що композиційне геометричне моделювання являє собою значно потужніший, у порівнянні з алгебраїчними методами, інструментарій, який дозволяє змінювати, локально, вихідні умови моделювання не змінюючи, при цьому, вже створеної композиційної геометричної моделі багатофакторних, багатошарових процесів у системах, що функціонують у багатовимірних просторах параметрів.

Отже, із сказаного випливає, що актуальною є необхідність розробки правил складання дослідження властивостей, виконання операцій та методів застосування компоматриць у геометричному моделюванні.

Метод дослідження. Як відомо, методом геометричного способу створення моделей є композиційна геометрія (КГ) [1]. КГ – це геометрія відношень частин геометричної фігури до цілого її елементу. Встановлено, що кожна вихідна геометрична фігура (будь-яка із її проекцій) і здобутий розв'язок, в цілому, поділені на геометричну та параметричну складові. Це надає змогу, з метою локального управління формою геометричною фігури, що моделюється, змінювати їх незалежно одна від одної [2, 3]. Потужним інструментом КГ є композиційні матриці (компоматриці) над полем дійсних чисел, тобто – дійсні компоматриці.

Композиція, у загальному сенсі, це дискретний набір функцінально взаємопов’язаних елементів. Дані елементи утворюють цілісний, за своєю структурою та функціонуванням, об’єкт, що має певну внутрішню єдність. Слід зауважити, що зміна або навіть заміна будь-якого або декількох з її елементів не тягне за собою ніяких змін для решти інших.

У КГ застосовується геометрична композиція (ГК), за допомогою якої можна представити будь-яку іншу композицію. ГК має своїми елементами непусту скінчену дискретну множину точок, частина з яких може утворювати певні підмножини. Слід відмітити, що для кожного з елементів цієї ГК встановлено їх власні розміри та розміри, що визначають взаємне розташування усіх її елементів. Зміна або навіть заміна будь-якого або декількох точок ГК ніяким чином не впливає на положення чи властивості решити інших її точок.

Треба розуміти, що будь-яка геометрична композиція разом з вербальною складовою є основою для створення геометриної фігури. Геометрична фігура (образ) – це деяка непуста скінчена упорядкована множина точок, для якої встановлені певні метричні (відстані, кути), позиційні (приналежність, взаємне розташування) деференціально-геометричні (дотичні, кривини) властивості. Слід зауважити, що множини точок ГФ можуть бути зв’язними (континуальними) або дискретними та утримувати різні підмножини у вигляді ліній, поверхонь, тіл. Це визначення надано, спираючись на роботу Найдиша В.М. [11].

Геометричний спосіб інтерполяції забезпечується характеристичними функціями. Ці функції формуються, виходячи з геометричних умов, закладених у вихідній геометричній композиції. Також вони входять складовими до точкових поліномів, які у вузлах інтреполяції дорівнюють нулю або одиниці. В результаті чого й здійснюється глобальна інтерполяція вихідних точок геометричним способом.

Точкові поліноми, що запезпечують геометричний спосіб інтерполяції, складаються із суми добутків вихідних базисних точок на відповідні параметри – характеристичні функції. Характеристична функція – це раціональна функція у параметричній формі, що утворюється як добуток різниць між значеннями параметрів для базисних точок та поточним параметром $0 \le t \le 1$, має наступний запис: $P_j(t) = \frac{1}{\lambda_j}\prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n}(t_i - t),\ j = \overline{1,n};\ \ 0 \le t \le 1,$ де $\lambda_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n}(t_i - t_j)$; $\frac{1}{\lambda_j}$ – коефіцієнт перетворення на одиницю характеристичної функції $P_j(t)$, коли $i = j$; i – індекс, що визначає степінь раціональної функції, який дорівнює $(n-1)$; j – номер вузла інтерполяції, $j=\overline{1,n}$; t – поточний параметр точкового поліному, $0 \le t \le 1$; t_j– значення вихідного параметру у j-му вузлі; t_i– значення поточних параметрів у вузлах інтерполяції (базисних точках).

Базисні точки (вузли інтерполяції) обираються серед точок вихідної геометричної композиції і призначені для породження усієї континуальної множини точок шуканого точкового полінома (інтерполянта). Відносно базисних точок складається точкове рівняння точкового полінома. В результаті чого він є вісьонезалежним, тобто запис точкового рівняння точкового полінома не залежить від місця обрання декартової системи координат або за результатом її переміщення. Слід зазначити, що точковий поліном глобально інтерполює базисні точки, а решта точок вихідної геометричної композиції ним апроксимуються.

Композиційна матриця (компоматриця) – це таблиця елементів, серед яких записи дійсних елементів у ній (за кількістю і за формою їх розташування) знаходяться у повній відповідності до розташування точок на вихідній геометричній фігурі (ГФ). Елементами компоматриці можуть бути функції, вирази, константи, інші компоматриці тощо. Наприклад, у точкової компоматриці елементами є точки вихідної геометричної фігури; у параметричній компоматриці – це параметри – характеристичні функції, що забезпечують геометричний спосіб інтерполяції Особливістю компоматриці є те, що кожен її елемент, за необхідності, може бути змінений або замінений незалежно від решти її елементів.

У композиційній геометрії кожна вихідна геометрична фігура поділяється на три складові: вербальну, геометричну і параметричну. Цей процес поділення нами названо уніфікацією, тобто приведення вихідної ГФ до стану, придатного до застосування у композиційному геометричному моделюванні. Вербальна складова надає пояснення щодо здійснення алгоритму побудови моделі. Геометричною складовою є точкова компоматриця вихідної ГФ. Параметричною складовою є параметрична компоматриця вихідної ГФ.

Параметризацію вихідної геометричної фігури забезпечують характеристичні функції, які формуються алгебраїчним способом, виходячи з координат базисних точок вихідної ГФ. Характеристичні функції, у кінцевому рахунку, являють собою просте відношення трьох точок. Алгоритм формування характеристичних функцій являє собою алгоритм параметризації вихідної ГФ. Застосування до ГФ обраного алгоритму параметризації, здійснює її параметризацію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомо [4, 7, 9, 10], матриця є прямокутна таблиця (n_{ij}); $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. У той же час у [9] вказується, що не усіляка таблиця є матрицею. У відповідності до [9, 10] теорія матриць розроблена для обслуговування алгебраїчних систем. Із вказаних джерел відомо, що лінійні системи, які описані за допомогою алгебраїчних матриць, ніколи не бувають хаотичними, тому елементи алгебраїчних матриць обумовлюють певні обмеження, вимоги, тощо.

В результаті цього, зміна будь-якого одного з елементів алгебраїчної матриці тягне за собою зміни решти її елементів. Отже, елементи алгебраїчних матриць створюють певну комбінацію, а самі алгебраїчні матриці є комбінаційними.

У зв'язку з розвитком інформаційних технологій та комп'ютерної техніки у бік збільшення їхньої потужності та інших можливостей, наразі виникла можливість і нагальна потреба розв'язання задач та побудови геометричних моделей процесів, що описуються композиційними матрицями [1, 5]. У композиційних матрицях набір елементів є хаотичним або випадковим, при цьому, стає можливим змінювати або замінювати будь-який або декілька її елементів. Зміни окремих елементів композиційної матриці не чіпають решти її елементів. На підтвердження необхідності введення композиційних матриць з'явилися і інші роботи аналогічного характеру [12, 13]. Однак, не розв'язаною лишається систематизація знань щодо теорії композиційних матриць. Запропоноване дослідження є першим кроком у розв'язанні цього питання.

Формулювання цілей статті. Для одно- та двовимірних композиційних матриць виявити ознаки рівності точкових, параметричних компоматриць, з’ясувати як ознаки їх рівності відбиваються на геометричних фігурах, що за допомогою цих компоматриць описані.

Основна частина. Відомо [9], що операції над алгебраїчними матрицями здійснюються через операції над їхніми елементами. Це твердження є правдивим і для композиційних матриць (компоматриць). Вказане твердження для компоматриць є необхідною умовою, але недостатньою. Виходячи з того, що компоматриці призначені для аналітичної формалізації геометричних фігур (ГФ), то додатковою вимогою для операцій над ними є те, що вони мають виконуватись у повній відповідності до геометричних перетворень, які здійснюються над ГФ. В іншому разі, вони будуть правдивими, однак позбавленими будь-якого сенсу. Точкове числення Балюби-Найдиша (точкове БН-числення) [2,3] та композиційна геометрія [1,5] розроблялись лише для об’єктів класу **R**, тобто, для множини дійсних чисел. Виходячи з цього, будемо розглядати операції над дійсними компоматрицями. Дійсними компоматрицями будемо називати компоматриці, елементами яких є об’єкти класу **R**, тобто дійсні числа, вирази, тощо.

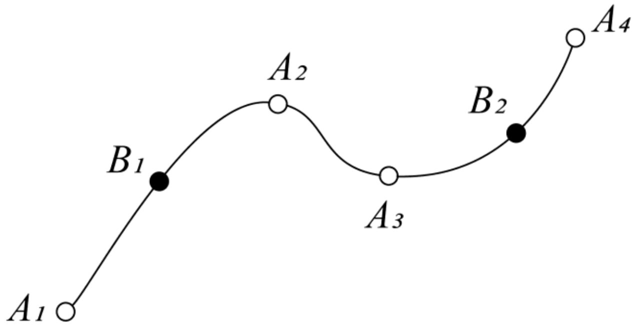

Рис.1. Сегмент лінії

Оскільки операції над компоматрицями випливають, виходячи із здійснення перетворень геометричних фігур, то деякі з них відрізняються від операцій над алгебраїчними матрицями, які базуються на описах дій над алгебраїчними об'єктами.

Окрім цього, алгебраїчні матриці – це є прямокутні таблиці, а дійсні елементи компоматриці мають обрис, який збігається з обрисом сегменту геометричної фігури, що за їхнім використанням аналітично формалізується. Наприклад, для сегменту однопараметричної ГФ, тобто лінії, застосовуються одноромірні компоматриці-рядки чи то компоматриці-стовпці, кількість елементів у яких відповідає кількості базисних точок на вихідному сегменті (рис.1).

На вказаному сегменті точки $A_i; i=\overline{1,4}$ обрано за базисні, для яких буде відшукуватись інтерполяційний точковий поліном, а точки B_1 та B_2 не є базисними, вони будуть ним апроксимуватись.

Одноромірна точкова компоматриця-рядок для сегменту лінії (рис.1) позначається наступним чином:

$$[\![\underset{l}{A_T}]\!] = [\![A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4]\!];\text{ або } [\![\underset{4}{A_T}]\!] = [\![A_j]\!];\ i=\overline{1;4}, \qquad (1)$$

де j – це кількість стовпців у рядку.

Одноромірна точкова компоматриця-стовпець для того ж сегменту лінії (рис.1) позначається наступним чином:

$$[\![\underset{l}{A_T}]\!] = \left[\!\!\left[\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \right]\!\!\right];\text{ або } [\![\underset{4}{A_T}]\!] = [\![A_i]\!];\ i=\overline{1;4}, \qquad (2)$$

де i – це кількість рядків у стовпці.

Точкова компоматриця-рядок (1) та компоматриця-стовпець (2) дорівнюють одна одній через те, що їхні елементи однакові, тому що вони визначені одними базисними точками сегменту лінії (рис.1):

$$[\![A_j]\!] = [\![A_i]\!];\ j=\overline{1;4};\ i=\overline{1;4}. \qquad (3)$$

Як бачимо, для одноромірної точкової компоматриці форма запису (чи то рядок, чи то стовпець) ніяким чином не відбивається на їх рівності та обирається, виходячи із доцільності побудови геометричної моделі. Головною ознакою рівності одноромірних точкових компоматриць є те, що вони мають бути побудованими на одних і тих самих базисних точках вихідної ГФ. Отже, якщо існує і є правдивим запис точкових компоматриць (3), то це означає, що з їх використанням описується сегмент однієї лінії.

Оскільки у композиційній геометрії кожна вихідна ГФ підлягає уніфікації, тобто поділенню на геометричну та параметричну складові, то наведені компоматриці точкові (1) та (2) відповідають геометричній складовій.

Складемо для параметричної складової компоматриці параметричні, у відповідності до вихідної ГФ (рис.1). Для цього необхідно встановити алгоритм параметризації і вирахувати за ним значення параметрів $a_j; j=\overline{1,4}$ у вузлах інтерполяції $A_j; j=\overline{1,4}$. Тоді однорозмірна параметрична компоматриця-рядок для сегменту лінії (рис.1) матиме вигляд:

$$[[A_{\Pi}]]_4 = [[a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]]; \text{або } [[A_{\Pi}]] = \|a_j\|; \; j=\overline{1;4}, \tag{4}$$

де a_j – значення параметрів у вузлах інтерполяції (базисних точках).

Однорозмірна параметрична компоматриця-стовпець для того ж (рис.1) сегменту лінії:

$$[[A_{\Pi}]]_4 = \left[\left[\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix}\right]\right]; \text{ або } [[A_{\Pi}]]_4 = [[a_i]]_4 = [[a_i]]; \; i=\overline{1;4}, \tag{5}$$

де a_i – значення параметрів для базисних точок.

Параметричні однорозмірні компоматриці-рядок $\|a_j\|_4$ та компоматриця-стовпець $[[a_i]]_4$ будуть рівними тільки тоді, коли однаковими будуть значення елементів-параметрів $a_j = a_i$ (для усіх $i = j$). Така рівність є можливою лише у випадку, коли були використані одні й ті самі базисні точки та коли був застосований однаковий спосіб параметризації сегменту кривої (рис.1).

Зауважимо, якщо на одних й тих самих базисних точках застосувати різні способи параметризації і одержати для одного з них значення параметрів: $a_j; \; j=\overline{1,4}$, а для другого способу параметризації – значення параметрів: $\overline{a}_j; j=\overline{1,4}$, то однорозмірні компоматриці-рядки не будуть рівними:

$$[[a_j]]_4 \neq [[\overline{a}_j]]_4. \tag{6}$$

Також для цього випадку не будуть рівними і однорозмірні компоматриці-стовпці:

$$\left[\!\left[a_i \right]\!\right]_4 \neq \left\|\bar{a}_i\right\|_4 . \quad (7)$$

Правдивими також будуть нерівності:

$$\left[\!\left[a_j \right]\!\right]_4 \neq \left\|\bar{a}_i\right\|_4 \text{ та } \left[\!\left[a_i \right]\!\right]_4 \neq \left\|\bar{a}_j\right\|_4 . \quad (8)$$

Отже, якщо для вихідної ГФ (рис.1) однорозмірні точкові компоматриці є рівними, а зберігаються нерівності (6), (7), (8), то для одних і тих самих базисних точок $A_j;\, j=\overline{1,4}$ або $A_i;\, i=\overline{1,4}$ будуть одержані різні інтерполяційні точкові поліноми.

Таким чином, дві однорозмірні компоматриці ГФ $\left\|A_\phi\right\|$ та $\left\|B_\phi\right\|$ розміру *К*, будуть рівними, тоді коли для однакових індексів *К* будуть рівними ємементи відповідних однорозмірних точкових компоматриць $A_i = B_i$ для усіх $i=\overline{1,k}$; та будуть рівними елементи відповідних однорозмірних параметричних компоматриць $a_i = b_i$ для усіх $i=\overline{1,k}$. При цьому, зовсім не має значення яким чином вони будуть впорядковані – чи то у компоматриці-рядки – $\left\|A_j\right\|_K, \left\|a_j\right\|_K, \left\|B_j\right\|_K, \left\|b_j\right\|_K$ чи то у компоматриці-сповпці $\left[\!\left[A_i\right]\!\right]_K, \left[\!\left[a_i\right]\!\right]_K, \left[\!\left[B_i\right]\!\right]_K, \left[\!\left[b_i\right]\!\right]_K$. Отже, якщо для двох однорозмірних компоматриць геометричних фігур $\left\|A_\phi\right\|_K$ та $\left\|B_\phi\right\|_K$ будуть правдивими наступні рівняння:

$$\left\|A_j\right\|_K = \left\|B_j\right\|_K;\ \left\|A_j\right\|_K = \left[\!\left[B_i\right]\!\right]_K;\ \left[\!\left[A_i\right]\!\right]_K = \left\|B_j\right\|_K;\ \left[\!\left[A_i\right]\!\right]_K = \left[\!\left[B_i\right]\!\right]_K; \quad (9)$$

$$\left\|a_j\right\|_K = \left\|b_j\right\|_K;\ \left\|a_j\right\|_K = \left[\!\left[b_i\right]\!\right]_K;\ \left[\!\left[a_i\right]\!\right]_K = \left\|b_j\right\|_K;\ \left[\!\left[a_i\right]\!\right]_K = \left[\!\left[b_i\right]\!\right]_K, \quad (10)$$

для $K=\overline{1,K}$. Це означає, що компоматриці геометричних фігур $\left\|A_\phi\right\|$ та $\left\|B_\phi\right\|$ складені для однієї вихідної ГФ, на одних і тих самих базисних точках, за одного й того самого способу її параметризації.

У разі, коли замість рівностей (9) існують відповідні нерівності, а рівності (10) зберігаються, то дві ГФ, що розглядаються, є конгруентними і можуть, шляхом відповідних переміщень та відображень, бути суміщеними, тобто пристати одна з одною.

Розглянемо, для прикладу, чотирикутний сегмент двопараметричної ГФ (рис. 2) та трикутний сегмент двопараметричної ГФ (рис. 3). Нехай, із якихось міркувань, на цих сегментах ГФ обрано напрями параметризації *(u, v)*, нанесено у цих напрямках сітки з певним кроком, та обчислено у цих напрямах значення функцій-параметрів $P_{ij}(u);\ P_{ij}(v)$ для базисних точок, які знаходяться на перетині ребер нанесених сіток. Поставимо номери, у довільній послідовності, на усі ребра сіток та ліній, що обмежують ці сегменти (тут ребра – це лінії сіток у обох напрямах).

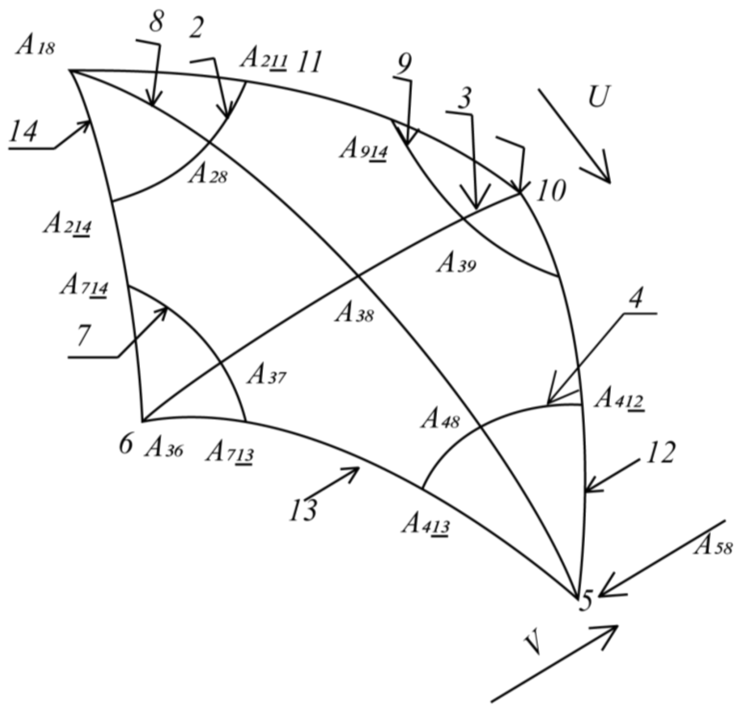

Рис. 2. Сегмент двопараметричної ГФ (чотирикутний)

Тоді для сегменту поверхні (рис. 2) точкова компоматриця у напрямі *u* матиме такий вигляд:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{u} \\ \left[\left[\begin{matrix} & & A_{18} & & \\ & A_{2\underline{14}} & A_{28} & A_{2\underline{11}} & \\ A_{36} & A_{37} & A_{38} & A_{39} & A_{3\underline{10}} \\ & A_{4\underline{13}} & A_{48} & A_{4\underline{12}} & \\ & & A_{58} & & \end{matrix}\right]\right]. \end{array} \qquad (11)$$

У цій точковій компоматриці (11) і у решти інших, що будуть розглядатися далі, першими завжди записуємо індекс з меншим значенням, другим – з більшим значенням. Якщо номери ребра сітки чи лінії обрису складаються з двох цифр, то ці номери підкреслені знизу.

У першому та п’ятому рядках (11) пустими є перший, другий, чертвертий та п’ятий елементи. У другому та четвертому – перший та п’ятий елементи. Як бачимо, запис дійсних елементів у точковій компоматриці (11), за обрисом, такий самий як і обрис вихідної ГФ (рис.2). Аналогічним чином для напряму параметру *u* запишемо і елементи параметричної компоматриці для геометричної фігури (рис.2), які являють собою характеристичні функції:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{u} \\ \left[\left[\begin{matrix} & & P_{18}(u) & & \\ & P_{2\underline{14}}(u) & P_{28}(u) & P_{2\underline{11}}(u) & \\ P_{36}(u) & P_{37}(u) & P_{38}(u) & P_{39}(u) & P_{3\underline{10}}(u) \\ & P_{4\underline{13}}(u) & P_{48}(u) & P_{4\underline{12}}(u) & \\ & & P_{58}(u) & & \end{matrix}\right]\right], \text{ для } 0 \le u \le 1. \end{array} \qquad (12)$$

Складемо точкову і параметричну композиції для напряму параметру V (рис. 2)

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \left[\!\!\left[\begin{array}{ccccc} & & A_{36} & & \\ & A_{71\underline{4}} & A_{37} & A_{71\underline{3}} & \\ A_{18} & A_{28} & A_{38} & A_{48} & A_{58} \\ & A_{91\underline{1}} & A_{39} & A_{91\underline{2}} & \\ & & A_{31\underline{0}} & & \end{array}\right]\!\!\right] \end{array}. \tag{13}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \left[\!\!\left[\begin{array}{ccccc} & & P_{36}(V) & & \\ & P_{71\underline{4}}(V) & P_{37}(V) & P_{71\underline{3}}(V) & \\ P_{18}(V) & P_{28}(V) & P_{38}(V) & P_{48}(V) & P_{58}(V) \\ & P_{91\underline{1}}(V) & P_{39}(V) & P_{91\underline{2}}(V) & \\ & & P_{31\underline{0}}(V) & & \end{array}\right]\!\!\right] \end{array}, \text{ для } 0 \le V \le 1. \tag{14}$$

Застосувавши до компоматриць (11), (12), (13), (14) метод рухомого симплексу [8], дістанемо компоматрицю ГФ $\left[\!\left[A_\phi\right]\!\right]$:

$$\underset{5\times5}{\left[\!\left[A_\phi\right]\!\right]} = \left[\!\!\left[\begin{array}{ccccc} & & A_{18}P_{18}(u)P_{36}(v) & & \\ & A_{21\underline{4}}P_{21\underline{4}}(u)P_{71\underline{4}}(v) & A_{28}P_{28}(u)P_{37}(v) & A_{21\underline{1}}P_{21\underline{1}}(u)P_{71\underline{3}}(v) & \\ A_{36}P_{36}(u)P_{18}(v) & A_{37}P_{37}(u)P_{28}(v) & A_{38}P_{38}(u)P_{38}(v) & A_{39}P_{39}(u)P_{48}(v) & A_{31\underline{0}}P_{31\underline{0}}(u)P_{58}(v) \\ & A_{41\underline{3}}P_{41\underline{3}}(u)P_{91\underline{1}}(v) & A_{48}P_{48}(u)P_{39}(v) & A_{41\underline{2}}P_{41\underline{2}}(u)P_{91\underline{2}}(v) & \\ & & A_{58}P_{58}(u)P_{31\underline{0}}(v) & & \end{array}\right]\!\!\right]. \tag{15}$$

Дворозмірна компоматриця (15) геометричної фігури (рис. 2) має розмір 5x5, тому що кожний її рядок і стовпець складаються із п'яти елементів. Третій елемент першого та п'ятого рядків і стовпців у цій компоматриці вважається як п'ятикратний, тобто усі п'ять елементів співпали, а це означає, що точковий поліном четвертого степеня, який їх інтерполює, вироджується у точку. Для точкових поліномів, що побудовані на геометричному способі інтерполяції, таке є можливим. Це було доведено у роботі [6].

Як бачимо, дворозмірна компоматриця (15) геометричної фігури, яку складено для вихідної ГФ (рис. 2), має обрис запису дійсних елементів аналогічний обрису самого сегменту ГФ.

Для ГФ (рис. 3), за таким алгоритмом, як і для ГФ (рис. 2), можна скласти компоматриці, аналогічні (11), (12), (13), (14), (15). Хоча обрис дійсних елементів дворозмірної компоматриці ГФ (15) не є прямокутним, вона, з урахуванням пустих елементів, вважається прямокутною, тому що наявні пусті елементи є присутніми, тобто не є відсутніми.

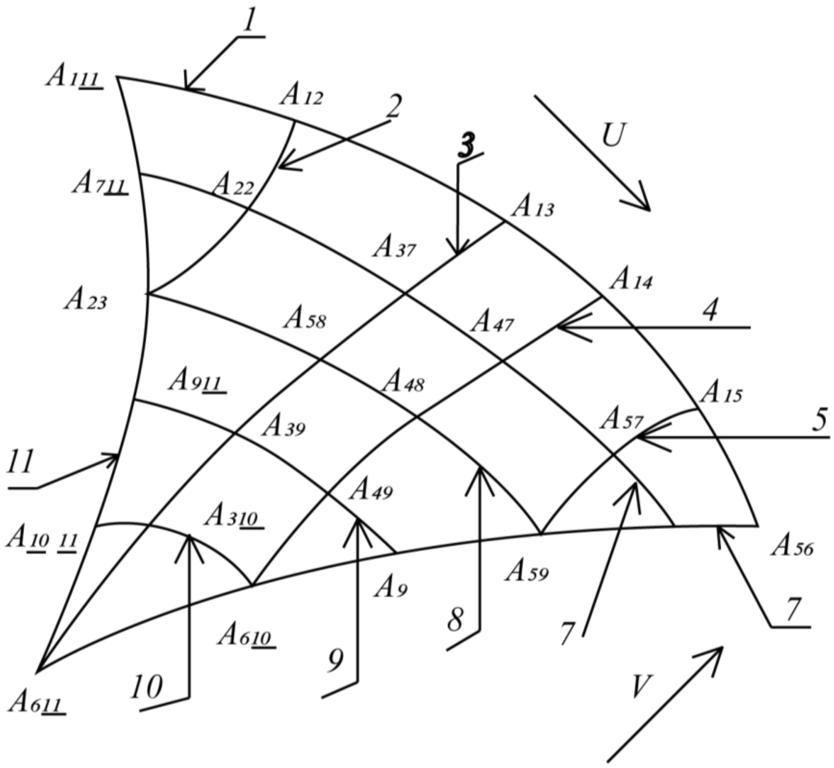

Рис. 3. Трикутний сегмент ГФ (двопараметричний)

Виходячи з того, що для аналітичного опису ліній сіток та обрису сегменту ГФ (каркасу сегменту поверхні) застосовуються однорозмірні компоматриці, для яких раніше було встановлено ознаки їхньої рівності, то можна припустити, що дві дворозмірні компоматриці ГФ $\|A_\phi\|$, $\|B_\phi\|$; точкові $[\![A_T]\!]$, $[\![B_T]\!]$; парамеричні $[\![A_П]\!]$, $[\![B_П]\!]$; будуть дорівнювати одна одній лише у випадку, коли вони будуть складені на основі одного й того ж каркасу поверхні з одними й тими самими базисними точками та за одного способу параметризації.

Виходячи з тих же міркувань щодо ліній каркасу поверхні, для дворозмірних компоматриць, правдивим буде наступне. Якщо для точкових дворозмірних компоматриць: $\underset{m\times n}{\|A_{ij}\|} \neq \underset{m\times n}{\|B_{ij}\|}$, тобто усі або деякі з дійсних елементів $A_{ij} \neq B_{ij}$, а для параметричних компоматриць будуть зберігатись рівності $\|a_{ij}\| = \|b_{ij}\|$, то дві ГФ, що розглядаються, є конгруентними і можуть, шляхом відповідних переміщень та відображень, пристати одна з одною.

Висновки. Надано правила формування та позначення одно- та дворозмірних композиційних матриць точкових, параметричних та геометричної фігури. Встановлено відповідності між композиційними матрицями та геометричними фігурами, які аналітично формалізовані цими компоматрицями. Виявлено ознаки рівності двох точкових компоматриць та двох параметричних компоматриць, що спростить проведення аналізу одержаних композиційних моделей. У подальших дослідженнях необхідно розробити проведення інших операцій над компоматрицями. У наведеному дослідженні зроблено ще один крок у бік розвитку теорії компоматриць, які є потужним інструментарієм композиційного геометричного моделювання (КГМ). З їх використанням набагато простіше і ефективніше відбувається складання одно-, дво- та трипараметричних точкових поліномів, які є основою КГМ. Застосування вказаних точкових поліномів дозволяє, з використанням методів КГМ, створювати композиційні геометричні моделі статичних і динамічних процесів, у яких може не обмежуватись кількість факторів, які можуть бути багатошаровими. При цьому, під час проведення тестування створеної композиційної моделі, з метою усунення виявлених недоліків, можна змінювати початкові умови задачі без зміни самої моделі. Наявність такої можливості, пришвидчує створення кінцевого продукту. Окрім сказаного, композиційні геометричні моделі для багатофакторних багатошарових задач може здійснюватися у n-вимірному просторі параметрів. При цьому, під час моделювання, тестування та експлуатації створеної композиційної моделіможна змінювати мірність простору параметрів без зміни самої моделі. Наявність такої можливості дозволяє адаптувати створену модель для розв’язку декількох задач. Отже, розвиток теорії композиційних матриць є наразі важливою і актуальною темою досліджень, які будуть здійснюватись і у подальшому.

Література

1. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … доктора тех. наук. Макеевка: МИСИ, 1995. 227 с.
3. Балюба И.Г. Точечное исчисление / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. Верещаги В.М. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015. 234 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. инд. перераб. М.: Наука, 1980, 996 с.
5. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017.108 с.
6. Верещага В.М., Найдиш А.В., Рубцов М.О., Павленко О.М.

Глобальна інтерполяція точковим поліномом геометричної композиції із трьох точок, які є трикратною точкою К.: КНУБА, 2020. Вип. 97. с. 29-35.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 4-е изд. – М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. Лит., 1988. 552 с.
8. Давиденко І.П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: автореф. дис... канд. техн. наук. - Мелітополь, 2012. 23 с.
9. Корн Г.А. Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: «Наука», 1978. 832 с.
10. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.3. М.: Советская энциклопедия, 1982. 613 с.
11. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція. Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. 250 с.
12. Холковський Ю.Р. Геометричне моделювання локального забруднення пролеглих територій автотранспортних магістралей із використанням дискретно-інтерполяційного методу. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2018. Вип.13. с. 185-191.
13. Холковський Ю.Р. Комплексний підхід щодо геометричного моделювання локальних забруднень прилеглих територій транспортних шляхів. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.15. с. 173-179.

АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОДНО - И ДВУРАЗМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТРИЦ

Верещага В.Н., Павленко А.М., Балюба И.Г., Лебедев В.А.

Определено, что операции над композиционными матрицами (компоматрицямы) осуществляются через выполнения операций над их элементами и в определенной соответствии с геометрических преобразований, которые применены к геометрическим фигурам (ГФ), что этими компоматрицамы описаны.

Доказано, что для однопараметричних ГФ (геометрических фигур) одноразмерных компоматрицы можно упорядочить как в строки, так и в столбцы, предоставляется обозначения одноразмерных компоматриц точечных и параметрических.

Проанализировано, что для одной исходной ГФ при различных алгоритмов ее параметризации будут получены разные решения – компоматрицы параметрические.

Определены условия для тождества двух одноразмерных компоматриц, построенных для одной исходной ГФ и для *конгруэнтных ГФ.*

Рассматриваются правила составления и обозначения двуразмерных действительных компоматриць для исходной четырехугольной и треугольной геометрических фигур. Указано на условия появления в них пустых элементов, обосновываются правила оперции с пустыми элементами.

На примерах показано, что очертание записи действительных элементов компоматриц совпадает с очертанием сегмента исходной ГФ, для которой эта компоматрица составлена, при этом, указанное касается как компоматриц точечных, так и компоматриц параметрических.

С применением метода подвижного симплекса, приведен пример формирования дворозмирнои компоматрици геометриччои фигуры, обосновывается избрания ее размера и составления на ее основе точечного уравнения точечного полинома, что интерполирует исходную ГФ, для которой составлен эту дворозмирну компоматрицю.

Также определено, что даже когда очертание записей действительных элементов дворозмирнои компоматрицы не является прямоугольным, она все равно считается прямоугольной по размеру, который определяется наибольшим количеством элементов в столбцу и строке.

Установлены признаки равенства двух двуразмерных компоматриц. Установлено, что они будут равными только в случае, когда составлены для одной исходной геометрической фигуры с одного алгоритма параметризации ее составляющих. Также установлены признаки конгруэнтности двух геометрических фигур по их двуразмерным композиционным матрицам.

Ключевые слова: точечный полином, композиционные матрицы, унификация геометрических фигур, характерные функции, геометрический способ интерполяции.

ANALYSIS OF GEOMETRIC FIGURES USING ONE AND TWO-DIMENSIONAL COMPOSITE MATRICES

Vereshchaha V., Pavlenko O., Balyuba I., Lebedev V.

It is determined that operations on compositional matrices (compatrixes) are carried out through operations on their elements and in a certain correspondence with geometric transformations that are applied to geometric figures (GF), which are described by these compatrixes.

It is proved that for one-parameter HF (geometric figures) one-dimensional compomatrixes can be ordered both in rows and columns, *designations of one-dimensional point and parametric compomatrixes are provided.*

It is analyzed that for one initial GF with different algorithms for its parameterization, different solutions will be obtained - parametric compomatrixes.

The conditions for the identity of two one-dimensional compomatrixes constructed for one initial GF and for congruent GF are determined.

We consider the rules for compiling and designating two-dimensional real compomatrixes for the initial quadrangular and triangular geometric figures. The conditions for the appearance of empty elements in them are indicated, the rules of operation with empty elements are justified.

The examples show that the outline of the recording of the actual elements of the compomatrix coincides with the outline of the segment of the original GF for which this compomatrix is composed, while the indicated applies to both point and parametric compomatrixes.

Using the method of moving simplex, an example is given of the formation of a world-wide compromise of a geometric figure, the choice of its size and the preparation of the point equation of a point polynomial based on it are interpolated, which interpolates the original GF for which this world-wide compromise is compiled.

It is also determined that even when the outline of the entries of the real elements of the dwarven compomatrix is not rectangular, it is still considered rectangular in size, which is determined by the largest number of elements in the column and row.

The signs of equality of two two-dimensional compomatrixes are established. It is established that they will be equal only if they are composed for one initial geometric figure with one algorithm for parameterizing its components. The signs of congruence of two geometric figures by their two-dimensional compositional matrices are also established.

Keywords: point polynomial, compositional matrices, unification of geometric figures, characteristic functions, geometric interpolation method.