УДК 514.18

УЗАГАЛЬНЕНИЙ СПОСІБ ФОРМУВАННЯ ПЛОСКИХ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ

Несвідоміна О.В., аспірант*

Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

Процес моделювання розподілу температури на поверхнях, нанесення зображення на криволінійні області з мінімальними спотвореннями потребує формування ізометричних сіток на площині та на поверхні. Одним із поширених способів формування плоских ізометричних сіток є використання функцій комплексної змінної та плоских ізотропних кривих з подальшим відокремленням дійсної та уявної частин. Розробка комп'ютерних моделей інтерактивного пошуку та аналізу ізометричних сіток за різними вихідними геометричними умовами передбачає узагальнений спосіб їх формування з можливістю варіювання їх формою та положенням.

Запропоновано використати ізотропний вектор для формування плоских ізотропних кривих, що забезпечило єдину послідовність аналітичних викладок за такими вихідними умовами: 1) вибору довільної функції дійсного аргумента; 2) заданого параметричного рівняння плоскої кривої; 3) заданого полярного рівняння плоскої кривої.

Оскільки аналітичні викладки виведення параметричного рівняння плоскої ізотропної кривої та відповідної ізометричної сітки є досить трудомісткими, то їх виконання здійснюється в середовищі символьної алгебри Maple. *З цією метою створено відповідне програмне забезпечення, яке в інтерактивному режимі дозволяє здійснити вибір функції дійсного аргумента, параметричне чи полярне рівняння плоскої напрямної кривої. Всі наступні етапи аналітичних перетворень з формування ізотропної кривої та відповідної ізометричної сітки здійснюється автоматично. Створена інтерактивна модель формування та аналізу плоских ізотропних кривих за різними вихідними умовами показала її ефективність, що підтверджено наведеними прикладами плоских ізометричних сіток для конкретних функцій дійсного параметра, плоских кривих в параметричній та полярній формі їх задання.*

Ключові слова: ізотропний вектор, плоска ізотропна крива, плоска ізометрична сітка, дійсна та комплексна площина, рівняння кривих в комплексній площині.

---

* Науковий керівник – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

Постановка проблеми. Існування різних способів формування плоских ізотропних кривих ускладнює їх комп'ютерну реалізацію за наперед заданими вихідними умовами. Вирішення цієї проблеми є розробка узагальненого способу формування ізотропних кривих за довільною аналітичною функцією, напрямною плоскою кривою в параметричній та полярній формах її задання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Побудова плоских ізотропних кривих за вихідними параметричними рівняннями плоскої кривої наведено в праці [2]. Формоутворення ізометричних сіток та їх застосування для нанесення зображень з мінімальними спотвореннями показано в праці [3].

Формулювання цілей статті. Розкрити узагальнений спосіб формування плоских ізотропних кривих за різними вихідними умовами, навести приклади їх застосування при побудові плоских ізометричних сіток в середовищі Maple [1].

Викладення основного матеріалу. Комплексне число $z = 1 + I$ на комплексній площині зображується точкою з координатами $[1, I]$, де $I = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця. Нехай маємо вектор $\boldsymbol{a}$ з координатами:

$$\boldsymbol{a} = [1, \pm I]. \quad (1)$$

Оскільки довжина вектора $\boldsymbol{a}$ на дійсній площині дорівнює нулю $\sqrt{1^2 + (\pm \mathrm{I})^2} = 0$, то такий вектор є ізотропним.

Формування ізотропних кривих за допомогою аналітичних функції $f(t)$ дійсного аргумента t.

Нехай маємо будь-яку функції $f(t)$ дійсного аргумента t. Її множення на ізотропний вектор $\boldsymbol{a}$ призводить до ізотропної лінії $\boldsymbol{r}(t)$ вздовж вектора $\boldsymbol{a}$ у наступному параметричному вигляді:

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t) \cdot \boldsymbol{a} = f(t)\,[1, \pm I]. \quad (2)$$

Оскільки візуалізувати ізотропну криву (2), яка має нульову довжину на дійсній площині не можливо, то її побудову можна здійснити або через її дійсну чи уявну частини, або ж через побудову ізометричних сіток, які ці криві породжують.

Послідовність формування плоских ізометричних сіток за допомогою ізотропної кривої (2) є наступною:

1. в ізотропній кривій $\boldsymbol{r}(t)$ виконати заміну дійсного аргумента t на задану функцію $f(z)$ комплексної змінної $z = u + I\,v$ – отримати криву $\boldsymbol{r}(f(u + I\,v))$ на комплексній площині:

$$\boldsymbol{r}(f(u + I\,v)) = \boldsymbol{r}[f_t(f(u + I\,v)), \pm I \cdot f_t(f(u + I\,v))]; \quad (3)$$

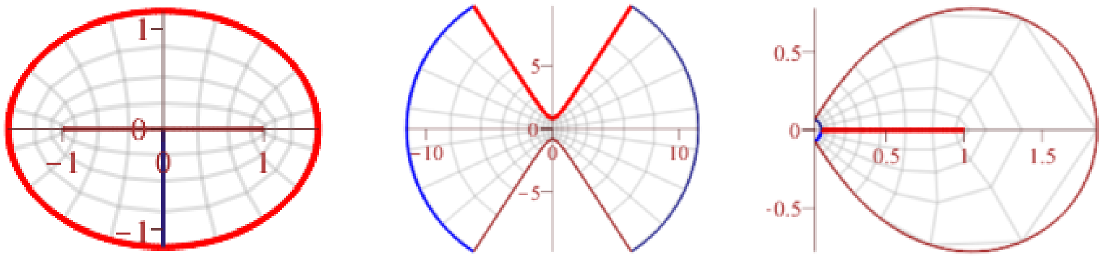
2. відокремити тільки дійсні частини кривої $\boldsymbol{r}(f(u + I\,v))$:

$$\boldsymbol{R}_R(u, v) = \boldsymbol{R}[Re\left(\boldsymbol{r}\big(f(z)\big)\right)]; \quad (4)$$

3. або відокремити тільки уявні частин кривої $\boldsymbol{r}(f(zu + I\ v\ ))$:

$$\boldsymbol{R}_I(u, v) = \boldsymbol{R}[Im\left(\boldsymbol{r}\left(f(u + I\ v\ )\right)\right)]. \qquad (5)$$

Плоскі ізометричні сітки (4) і (5) є конгруентними і повернутими одна від одної на кут 90^0. На рис.1 побудовані ізометричні сітки (4) відповідно для функцій $f(t) = sin(t), sinh(t), sech(t)$.



а) б) в)

Рис.1. Плоскі ізометричні сітки для функцій $f(t)$:
а) $sin(t)$; б) $sinh(t)$; в) $sech(t)$

Формування ізотропних кривих за допомогою параметрично заданих плоских кривих $\boldsymbol{\mu}(t) = [x(t), y(t)]$ дійсної змінної $t = t_1..t_2$.

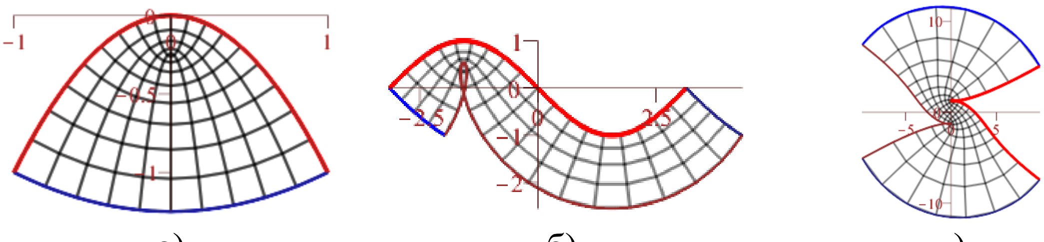
Оскільки кожна точка $[x, y]$ площини зображує комплексне число $z = x + Iy$, тоді параметричне рівняння плоскої кривої $\boldsymbol{\mu}(t)$ на комплексній площині буде виражатися наступним виразом:

$$f(t) = x(t) + I\ y(t), t = t_1..t_2\ . \qquad (6)$$

Множення виразу f(t) дійсного аргумента t на ізотропний вектор $\boldsymbol{a}$ призводить до ізотропної лінії $\boldsymbol{r}(t)$ у параметричному вигляді:

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t) \cdot \boldsymbol{a} = [x(t) + I\ y(t), I\ x(t) - y(t)]. \qquad (7)$$

Ізометричні сітки (4) для плоских кривих $\boldsymbol{\mu}(t) = [t, t^2]$, $[t, sin(t)]$, $[sin(t), sinh(t)]$ побудовані на рис.2.



а) б) в)

Рис.2. Ізометричні сітки за напрямними плоскими кривими $\boldsymbol{\mu}(t)$:
а) $[t, t^2]$; б) $[t, sin(t)]$; в) $[sin(t), sinh(t)$

Формування ізотропних кривих за допомогою плоских кривих $\rho(t)$ заданих в полярній системі координат.

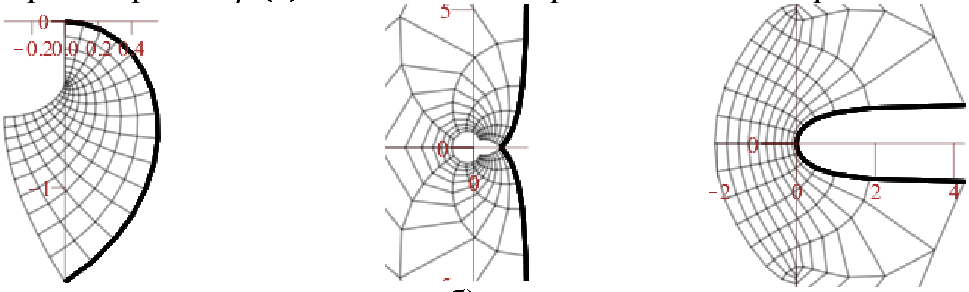
Рівняння будь-якої кривої $\rho(t)$ в полярній системі координат на комплексній площині матиме наступну тригонометричну форму:

$$f(t) = \rho(t) \cdot (cos(t) + I \cdot sin(t)). \qquad (8)$$

Множення виразу $f(t)$ кривої (8) на ізотропний вектор $\boldsymbol{a}$ призводить до ізотропної лінії $\boldsymbol{r}(t)$ у параметричному вигляді:

$$\boldsymbol{r}(t) = \rho(t)\,[cos(t) + I \cdot sin(t)\,, -I \cdot (cos(t) + I \cdot sin(t))]. \qquad (9)$$

На рис.3 побудовані плоскі ізометричні сітки за рівняння (9) для характерних кривих $\rho(t)$ заданих в полярній системі координат.



а) б) в)

Рис.3. Плоскі ізометричні сітки за напрямними кривими у полярній системі координат за умови $a = 1$: а) спіраль Архімеда $\rho(t) = at$; б) строфоїда $\rho(t) = a\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}$; в) каппа $\rho(t) = a\,ctg(t)$

Криву $\rho(t)$ в полярній системі координат на комплексній площині також можна представити у експоненціальній формі $f(t) = \rho(t)\, e^{It}$. Множення виразу $f(t)$ на ізотропний вектор $\boldsymbol{a}$ призводить до ізотропної лінії $\boldsymbol{r}(t)$ у параметричному вигляді:

$$\boldsymbol{r}(t) = \rho(t)\,[e^{It}, I \cdot e^{It}]. \qquad (9)$$

Ізотропна крива (9) формує плоскі ізометричні сітки конгруентні ізотропній кривій (8).

Всі вище розглянуті способи вписуються в єдину схему (табл.1), у відповідності якої була створена комп'ютерна модель формування ізометричних сіток за різними вихідними умовами.

Таблиця 1

Вибір	Перезапис $f(t)$ у комплексній формі	Ізотропна крива $\boldsymbol{r}(t)$	Ізометрична сітка
функції $f(t)$	$f(t)$	$[f(t)\,, I \cdot f(t)]$	$\boldsymbol{R}_R(u, v)$
кривої $[x(t), y(t)]$	$x(t) + I \cdot y(t)$	$\begin{bmatrix} x(t) + I\,y(t), \\ I \cdot x(t) - y(t) \end{bmatrix}$	
кривої $\rho(t)$	$\rho(t) \cdot e^{It}$	$\rho(t)\,[e^{It}, I \cdot e^{It}]$	

Висновки. Використання ізотропного вектора $[1, \pm I]$ дозволив звести аналітичний опис формування плоскої ізотропної кривої та відповідної ізометричної сітки до 4-х основних операцій: 1) вибору напрямної кривої; 2) перезадання цієї кривої в комплексній формі; 3) множення комплексного рівняння кривої на ізотропний вектор; 4) відокремлення дійсної чи уявної частин ізотропної кривої.

Література

1. Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование и разработка приложений в Maple. Гродно-Таллин, 2007. 458 с.
2. Несвідоміна О.В. Побудова плоских ізометричних сіток за наперед заданими плоскими кривими. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон: ХНТУ, 2017. Вип.3(620. Т.2. С. 196-199.
3. Пилипака С.Ф., Кремець Т.С., Несвідоміна О.В. Конформне відображення растрових написів на плоскі криволінійні області. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2018. Вип. 13. С. 124 – 130.

ОБОБЩЕННЫЙ СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ ИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ

Несвидомина А.В.

Процесс моделирования распределения температуры на поверхностях, нанесение изображения на криволинейные области с минимальными искажениями требует формирования изометрических сеток на плоскости и на поверхности. Одним из распространенных способов формирования плоских изометрических сетей является использование функций комплексной переменной и плоских изотропных кривых с последующим отделением действительной и мнимой частей. Разработка компьютерных моделей интерактивного поиска и анализа изометрических сетей по различным исходным геометрическими условиями предусматривает обобщенный способ их формирования с возможностью варьирования их формой и положением.

Предложено использовать изотропный вектор для формирования плоских изотропных кривых, что обеспечило единую последовательность аналитических выкладок по таким исходными условиями: 1) выбора произвольной функции действительного аргумента; 2) заданного параметрического уравнения плоской кривой; 3) заданного полярного уравнения плоской кривой.

Поскольку аналитические выкладки вывода параметрического уравнения плоской изотропной кривой и соответствующей изометрической сетки являются достаточно трудоемкими, то их выполнение осуществляется в среде символьной алгебры Maple. С этой целью создано соответствующее программное обеспечение, которое в интерактивном режиме позволяет осуществить выбор функции действительного аргумента, параметрическое или полярное уравнение плоской направляющей кривой. Все последующие этапы аналитических преобразований по формированию изотропной кривой

и соответствующей изометрической сетки осуществляется автоматически. Создана интерактивная модель формирования и анализа плоских изотропных кривых различными исходными условиями показала ее эффективность, что подтверждено приведенными примерами плоских изометрических сеток для конкретных функций действительного параметра, плоских кривых в параметрической и полярной форме их задания.

Ключевые слова: изотропный вектор, плоская изотропная кривая, плоская изометрическая сетка, действительная и комплексная плоскости, уравнение кривых в комплексной плоскости.

GENERALIZED METHOD FOR FORMING PLANE ISOTROPIC CURVES

Nesvidomina A.

The process of modeling the temperature distribution on surfaces, applying an image to curved areas with minimal distortion requires the formation of isometric grids on the plane and on the surface. One of the common ways to form planar isometric networks is to use the functions of a complex variable and planar isotropic curves, followed by separation of the real and imaginary parts. The development of computer models for the interactive search and analysis of isometric networks according to various initial geometric conditions provides a generalized method for their formation with the possibility of varying their shape and position.

It is proposed to use an isotropic vector for the formation of flat isotropic curves, which ensured a single sequence of analytical calculations according to the following initial conditions: 1) selection of an arbitrary function of a real argument; 2) a given parametric equation of a plane curve; 3) a given polar equation of a plane curve.

Since the analytical calculations of the derivation of the parametric equation of a plane isotropic curve and the corresponding isometric grid are rather laborious, their execution is carried out in the environment of the Maple symbolic algebra. To this end, the corresponding software has been created, which interactively allows you to select the function of a real argument, a parametric or polar equation of a plane guide curve. All subsequent stages of analytical transformations to form an isotropic curve and the corresponding isometric grid are carried out automatically. An interactive model for the formation and analysis of plane isotropic curves with various initial conditions has been created, which has shown its effectiveness, which is confirmed by the given examples of plane isometric grids for specific functions of the real parameter, plane curves in the parametric and polar form of their job.

Keywords: isotropic vector, plane isotropic curve, plane isometric grid, real and complex planes, equation of curves in the complex plane.