

УДК 621.85

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗНОСУ ПРОФІЛЯ ЗУБЦЯ ЗІРОЧКИ ЛАНЦЮГОВОЇ ПЕРЕДАЧІ АБО ГУСЕНИЧНОГО РУШІЯ

Андрієнко С.В. \*

[andrisergejjsv@gmail.com](mailto:andrisergejjsv@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4310-3128

Протасов Р.В. \*

[protasov@tmm-sapr.org](mailto:protasov@tmm-sapr.org), ORCID: 0000-0003-1611-0610

Устиненко О.В., к.т.н.

[ustin1964@tmm-sapr.org](mailto:ustin1964@tmm-sapr.org), ORCID: 0000-0002-6714-6122

Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Україна)

*Статтю присвячено вирішенню проблеми підвищення зносостійкості профілів зубців зірочок ланцюгових втулково-роликкових передач та ведучих коліс гусеничного рушія. Розроблено математичну модель процесу зношування профілю зубця зірочки. Спочатку розраховуються координати точок профіля зубця. Для стандартних передач профіль розраховується за загально прийнятими методиками. У випадку еволютного зацеплення ці координати є результатом чисельного розв'язання звичайного диференціального рівняння (ЗДР) 2-го порядку, що описує профіль еволютного зубця. Будується профіль в системі координат  $x, y$ , центр якої співпадає із центром обертання зірочки, а вісь  $y$  співпадає із віссю симетрії зубця. Потім виконується апроксимація профілю за допомогою кривих Безьє третього порядку. Далі у розрахункових точках профілю зубця зірочки визначаються відносні швидкості ковзання, радіуси кривизни профілю та контактні напруження за формулою Г. Герца для початкового дотику пружних тіл по лінії. Після цього розраховуються величини зносу профілю зубця за один цикл навантаження у цих точках та визначаються координати точок зношеного профілю. Далі обчислюються нові значення швидкостей ковзання, радіусів кривизни та контактних напружень. Після цього розраховуються значення зносу на цьому циклі, нові координати точок зношеного профілю і так далі. Одночасно на кожному циклі обчислюють сумарний знос профілю зірочки в кожній точці та шукають максимальну величину зносу. Таким чином, маємо ітераційний процес, який зупиняється при досягненні величини критичного зносу. І наприкінці визначається ресурс ланцюгової передачі або гусеничного рушія за критерієм граничного зносу профілю зірочки. Створена математична модель є достатньо універсальною – вона може бути застосована для дослідження ланцюгових втулкових передач та*

---

\* Науковий керівник – к.т.н., доц., с.н.с. Устиненко О.В.

гусеничного рушія з будь-яким стандартним або нестандартним профілем зубця зірочки. Її застосування у процесі проектування дасть змогу створювати ланцюгові передачі та гусеничні рушії з підвищеною зносостійкістю.

*Ключові слова:* ланцюгова передача, математична модель, зірочка, зубець, знос.

**Постановка проблеми.** Загальновідомо, що головною причиною виходу із експлуатації ланцюгових втулково-роликкових передач є абразивний знос шарнірів ланцюга. Однак у багатьох випадках на перший план виходить проблема прискореного абразивного зносу робочих профілів зубців зірочок. До таких випадків відносяться:

1. Передачі із втулковими ланцюгами без роликів, які часто застосовуються в автомобілебудуванні з метою економії маси.

2. Зірочки ведучих коліс гусеничної техніки (по своїй геометрії та кінематиці аналогічні ланцюговій втулковій передачі).

3. Також прискорений знос зірочок часто зустрічається в передачах сільськогосподарського та гірничого машинобудування, працюючих в умовах підвищеної запиленості, проте для них він зазвичай не є обмежуючим фактором навантажувальної здатності.

Тому підвищення зносостійкості профілів зубців зірочок та ведучих коліс є актуальною науково-практичною задачею сучасного машинобудування, – її розв'язання забезпечує необхідну довговічність ланцюгових передач і гусеничного рушія.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** За останні роки питання зносостійкості передач зачепленням знайшло свій розвиток у достатньої кількості робіт. У працях [1, 2] досліджувалось підвищення ресурсу конічних передач з двоопукло-ввігнутими зубцями вибором раціональних параметрів зачеплення. Робота [3] присвячена питанням тертя та зносу при екстремальних умовах експлуатації. Моделювання швидкостей відносного прослизання профілів зубців виконано у дослідженні [4]. Також особливо виділимо роботи А. І. Павлова щодо створення сімейства так званих еволютних профілів для зубчастих та ланцюгових передач із опукло-увігнутим контактом [5].

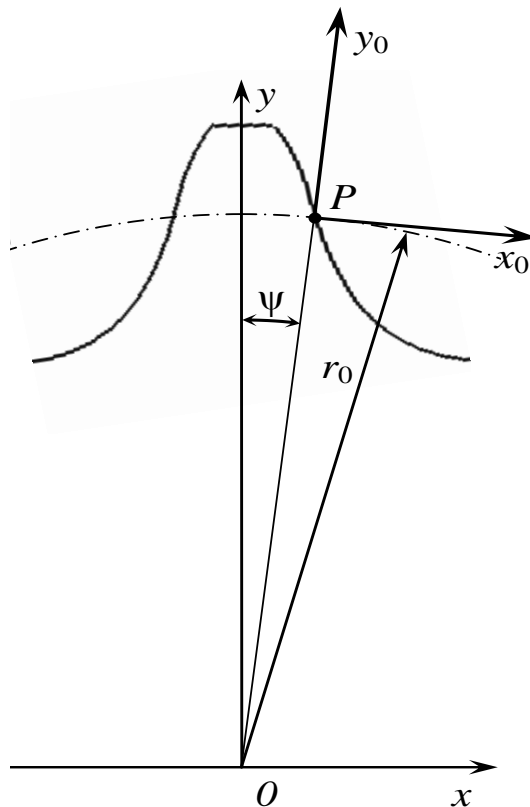
**Формулювання цілей статті.** Як відомо [1–3], інтенсивність зносу зубців залежить не тільки від змащування та шорсткості поверхонь, але і від швидкості їх відносного прослизання та рівня контактних напружень в зачепленні. Тому доцільно побудувати комплексну методику аналізу ресурсу ланцюгової передачі та гусеничного рушія за критерієм зносу профілю зубця зірочки, що врахує усі ці фактори. Основою методики є математична модель процесу зношування профілю зубця. Отже, метою статті є розробка такої математичної моделі. Додаткова умова полягає в необхідності універсалізації моделі, яка повинна підходити для дослідження ланцюгової передачі та гусеничного рушія як зі стандартним,

так і з нестандартним профілем, наприклад з вище згаданим еволютним. Моделювання буде виконуватися для зачеплень із втулковими ланцюгами без роликів, як найбільш схильних до зносу зубців.

**Основна частина.** Перед безпосередньо моделюванням процесу зношування необхідно виконати *побудову профіля зубця зірочки*. Спочатку розраховуються координати точок профіля зубця  $x_{0j}, y_{0j}$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ; тут  $k$  – кількість розрахункових точок профілю) в системі координат, центр якої співпадає із полюсом зачеплення  $P$ , а вісь  $x_0$  є дотичною до ділильного кола радіусом  $r_0$  (рис. 1). Для стандартних передач профіль розраховується за загально прийнятими методиками [6, 7]. У випадку еволютного зачеплення ці координати є результатом чисельного розв'язання звичайного диференціального рівняння (ОДУ) 2-го порядку, що описує профіль еволютного зубця [8]. Потім будуємо профіль в системі координат  $x, y$ , центр якої співпадає із центром обертання колеса, а вісь  $y$  співпадає із віссю симетрії зубця (рис. 1). Координати точок профілю розраховуються за формулами:

$$\begin{cases} x_{1j} = r_0 \sin \psi + x_{0j} \cos \psi + y_{0j} \sin \psi; \\ y_{1j} = r_0 \cos \psi - x_{0j} \sin \psi + y_{0j} \cos \psi, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\psi$  – центральний кут, що відповідає половині товщини зубця по дузі ділильного кола;  $j = 1, 2, \dots, k$  ( $k$  – кількість розрахункових точок).



$P$  – полюс зачеплення;  $r_0$  – радіус ділильного кола

Рис. 1. Системи координат для побудови профілю зубця

На завершення цього етапу, для зручності визначення швидкостей ковзання та радіусу кривизни профілю в точці контакту на основі чисельного рішення, виконується апроксимація профілю за допомогою кривих Безьє третього порядку [8].

*Математична модель процесу зношування зубця зірочки.* При її розробці прийняті наступні основні допущення [1]:

- усі зубці однієї зірочки зношуються однаково;
- сумарний знос дотичних тіл в контактній точці розподіляється між ними прямо пропорційне шляху ковзання точки контакту по цих тілах та обернено пропорційне до твердості контактної поверхні;
- сумарний знос в контакті двох поверхонь пропорційний питомій потужності, що витрачається на подолання сил тертя.

Запропонована математична модель містить наступні складові.

1. Визначення швидкості ковзання в ланцюговому зачепленні. Швидкості переміщення точки контакту за профілем зубця та втулки  $V_{ty1}$  та  $V_{ty2}$  є швидкостями кочення на відповідних ділянках в межах певного тимчасового інтервалу:

$$V_{ty1i,j} = \frac{\Delta S_1}{\Delta t}; \quad V_{ty2i,j} = \frac{\Delta S_2}{\Delta t},$$

де  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$  – шлях, пройдений точкою контакту за профілем зубця та втулки впродовж часового інтервалу  $\Delta t$ ;  $i$  – номер циклу навантаження (відповідає 1 оберту зірочки).

Фізичний сенс циклу по  $i$  полягає в тому, що після кожного циклу навантаження відбувається деградація (знос) профілю, тобто зміна його геометрії, характеристик кінематики та міцності.

Різниця цих швидкостей є абсолютна швидкість ковзання профілів,

$$V_{cki,j} = V_{ty1i,j} - V_{ty2i,j}.$$

Для передачі із втулковим ланцюгом без роликів шлях ковзання точки контакту по зубу набагато більше, ніж по втулці. Тому

$$V_{cki,j} \approx V_{ty1i,j}; \quad V_{ty2i,j} \approx 0.$$

Значення  $V_{cki,j}$  будемо знаходити по наступній залежності з [4], поклавши  $\omega_1 = 1 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 0$ ,

$$V_{cki,j} = PY(\omega_1 + \omega_2) = \sqrt{x_{li}^2(x_0 = 0) - x_{li,j}^2(x_{0j}) + y_{li}^2(x_0 = 0) - y_{li,j}^2(x_{0j})}. \quad (2)$$

2. Знаходження радіусу кривизни профілю зубця зірочки  $\rho_{1i,j}$  за відомою формулою диференціальної геометрії диференціюванням рівняння кривої Безьє

$$\rho_{1i,j} = \frac{(x'_{li,j}(\lambda_{i,j}) + y'_{li,j}(\lambda_{i,j}))^{3/2}}{y''_{li,j}(\lambda_{i,j}) \cdot x'_{li,j}(\lambda_{i,j}) - x''_{li,j}(\lambda_{i,j}) \cdot y'_{li,j}(\lambda_{i,j})}, \quad (3)$$

де  $\lambda_{i,j}$  – поточний параметр кривих Безьє, що змінюється в межах  $0 \leq \lambda_{i,j} \leq 1$  та відповідає  $j$ -й точці кривої [7].

3. Визначення контактної напруженості в ланцюговому зачепленні за формулою Г. Герца для початкового дотику пружних тіл по лінії. Залежність для розрахунку контактних напружень  $\sigma_{Hi,j}$ , МПа, в  $j$ -й точці профілю на  $i$ -му циклі навантаження:

$$\sigma_{Hi,j} = 0,418 \sqrt{\frac{F_{ni,j} E_H}{b_w \rho_{Hi,j}}}, \quad (4)$$

де  $\rho_{Hi,j} = (\rho_{1i,j} \cdot \rho_{2i,j}) / (\rho_{2i,j} \pm \rho_{1i,j})$  – приведений радіус кривизни в точці контакту зубця та втулки (знак "+" при двоопуклому контакті, а "-" при опукло-увігнутому);  $E_H = 2(E_1 \cdot E_2) / (E_1 + E_2)$  – приведений модуль пружності матеріалів зірочки та втулки;  $b_w$  – робоча ширина зубця зірочки;  $F_{ni,j}$  – нормальне зусилля в точці контакту,

$$F_{ni,j} = \frac{2T_i}{d_{ij} \cos \alpha_{ij}} = \frac{T_i}{\sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2} \cos \alpha_{ij}},$$

де  $T_i$  – крутний момент на зірочці, що відповідає  $i$ -му циклу навантаження.

Радіус кривизни профілю зубця  $\rho_{1i,j}$  визначається за залежністю (3), а  $\rho_2 = 0,5d_g = \text{const}$ , де  $d_g$  – діаметр втулки ланцюга.

4. Розрахунок величини зносу профілю зубця за один цикл навантаження. Врахуємо, що твердість поверхні зубця зазвичай суттєво менша твердості втулки, а шлях ковзання точки контакту по зубцю істотно більший, ніж по втулці. Тоді в першому наближенні застосуємо наступний розподіл спільного зносу  $I_{zi,j}$  профілю зубця ( $I_{z1i,j}$ ) та втулки ( $I_{z2i,j}$ ) в  $j$ -й точці профілю за  $i$ -й цикл навантаження:

$$I_{z1i,j} \approx I_{zi,j}; \quad I_{z2i,j} \approx 0.$$

Тепер ми можемо записати залежність для визначення зносу профілю зубця в  $j$ -й точці профілю за  $i$ -й цикл навантаження по аналогії із запропонованою в [1] для зубчастих передач:

$$I_{zi,j} = i_z \alpha_T \alpha_B P_{zi,j}, \quad (5)$$

де  $i_z = 0,03$  мм/Вт – питома інтенсивність зношування;  $\alpha_T$  – коефіцієнт варіації питомої інтенсивності зношування, що враховує зміну  $i_z$  в процесі експлуатації, визначається експериментально;  $\alpha_B$  – коефіцієнт, що враховує вплив миттєвої температури контакту зубців;  $P_{zi,j}$  – питома потужність сил тертя в контактній зоні при відносному ковзанні з ковзанням контактуючого зуба та втулки

$$P_{zi,j} = f_{\text{три},j} \cdot \sigma_{Hi,j} \sqrt{K_d \cdot V_{\text{ски},j}},$$

$K_d$  – коефіцієнт динамічного навантаження;  $f_{\text{три},j}$  – коефіцієнт тертя з урахуванням ковзання і кочення, визначається за формулою Ю. М. Дроздова [3] з урахуванням вище прийнятого співвідношення швидкостей кочення зубця та втулки:

$$f_{\text{тpи},j} = \frac{4,5 \cdot 10^{-2} \sigma_{\text{Hи},j}^{0,02} \left[ 10 + \lg \left( \frac{\text{HB} \cdot R_{\text{ai}}}{E_{\text{H}} \cdot \rho_{\text{Hи},j}} \right) \right]}{v^{0,07} \cdot V_{\text{ски},j}^{0,32}} \leq f_{\text{тpмаx}},$$

де  $\text{HB}$  та  $R_{\text{ai}}$  – твердість за Бринелем та середнє арифметичне значення шорсткості профілю для менш твердого із контактуючих тіл (найчастіше – для зубця);  $v$  – кінематична в'язкість мастила при температурі поверхонь, що вступають у контакт;  $f_{\text{тpмаx}}$  – максимальне значення коефіцієнта тертя для цих умов (що приймається на основі експериментальних даних).

5. Оцінка ресурсу ланцюгової передачі за критерієм зносостійкості. Після визначення величини зносу за залежністю (5) визначаємо координати точок зношеного профілю  $x_{i+1,j}$ ,  $y_{i+1,j}$ :

$$\begin{cases} x_{i+1,j} = x_{i,j} - I_{z_{i,j}} \cos(\alpha_{i,j} - \psi_i); \\ y_{i+1,j} = y_{i,j} - I_{z_{i,j}} \sin(\alpha_{i,j} - \psi_i). \end{cases}$$

Далі обчислюємо нові значення  $\rho_{\text{Hи}+1,j}$ ,  $V_{\text{ски}+1,j}$  та  $\sigma_{\text{Hи}+1,j}$ , після чого знаходимо значення зносу  $I_{z_{i+1,j}}$  на  $i+1$ -му циклі навантаження, координати точок зношеного профілю  $x_{i+2,j}$ ,  $y_{i+2,j}$  і так далі. Одночасно на кожному циклі обчислюється сумарний знос профілю зірочки в кожній  $j$ -й точці та знаходиться максимальна величина зносу за формулами:

$$I_{z_{\Sigma j}} = \sum_i I_{z_{i,j}}; \quad I_{z_{\text{маx}}} = \max_{1 \leq j \leq k} I_{z_{\Sigma j}}. \quad (6)$$

Таким чином, ми отримали ітераційний процес, який зупиняється при досягненні величини критичного зносу  $I_{z_{\text{кр}}}$ , тобто при виконанні умови  $I_{z_{\text{маx}}} \geq I_{z_{\text{кр}}}$ .

Тоді ресурс ланцюгової передачі або гусеничного рушія за критерієм зносу профілю зірочки,  $L_h$ , годин:

$$L_h = \frac{N_{\text{ц}}}{60 \cdot n}, \quad (7)$$

де  $N_{\text{ц}}$  – кількість циклів навантаження до досягнення величини критичного зносу  $I_{z_{\text{кр}}}$ ;  $n$  – частота обертання зірочки.

**Висновки.** Створено математичну модель процесу зношування профілю зубця зірочки ланцюгової передачі або гусеничного рушія. Вона є достатньо універсальною – вона може бути застосована для дослідження ланцюгових втулкових передач та гусеничного рушія з будь-яким стандартним або нестандартним профілем зубця зірочки. Її застосування у процесі проектування дасть змогу створювати ланцюгові передачі та гусеничні рушії з підвищеною зносостійкістю.

### Література

1. Кузнецова А.В. Підвищення ресурсу конічних передач з двоопукло-ввігнутими зубцями вибором раціональних параметрів зачеплення: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.02.02. Харків, 2014. 22 с.

2. Оніщенко В.П., Кузнецова А.В. Вплив зносу двоопукло-угнутих зубців конічних передач на параметри зачеплення. *Машинознавство: Всеукраїнський щомісячний науково-технічний і виробничий журнал*. Львів, 2011. № 11–12 (173–174). С. 15–20.
3. Дроздов Ю.Н., Павлов В.Г., Пучков В.Н. Трение и износ в экстремальных условиях: справочник. Москва: Машиностроение, 1986. 224 с.
4. Протасов Р.В., Устиненко А.В., Кротенко Г.А., Сериков В.И. Исследование скорости скольжения профилей зубьев в эволютных передачах. *Вісник НТУ "ХПІ": Зб. наук. праць. Серія "Проблеми механічного приводу"*. Харків: НТУ "ХПІ", 2012. № 36. С. 127–131.
5. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. Харьков: ХНАДУ, 2005. 100 с.
6. Глущенко И.П. Основы проектирования цепных передач с втулочно-роликовыми цепями. Львов: Изд. Львовского ун-та, 1964. 226 с.
7. Платонов В.Ф., Леиашвили Г.Р. Гусеничные и колесные транспортно-тяговые машины. Москва: Машиностроение, 1986. 296 с.
8. Андриенко С.В., Устиненко А.В., Воронцов Б.С. Численное моделирование профиля зуба звездочки цепной передачи. *Механіка та машинобудування*. 2014. № 1. С. 11–17.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗНОСА ПРОФИЛЯ ЗУБА ЗВЕЗДОЧКИ ЦЕПНОЙ ПЕРЕДАЧИ ИЛИ ГУСЕНИЧНОГО ДВИЖИТЕЛЯ**

Андриенко С.В., Протасов Р.В., Устиненко А.В.

*Статья посвящена решению проблемы повышения износостойкости профилей зубьев звездочек цепных втулочно-роликовых передач и ведущих колес гусеничного движителя. Разработана математическая модель процесса изнашивания профиля зуба звездочки. Сначала рассчитываются координаты точек профиля зуба. Для стандартных передач профиль рассчитывается по общепринятыми методиками. В случае эволютного зацепления эти координаты являются результатом численного решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 2-го порядка, которое описывает профиль эволютного зуба. Строится профиль в системе координат  $x, y$ , центр которой совпадает с центром вращения звездочки, а ось  $y$  совпадает с осью симметрии зуба. Затем выполняется аппроксимация профиля с помощью кривых Безье третьего порядка. Далее в расчетных точках профиля зуба звездочки определяются относительные скорости скольжения, радиусы кривизны профиля и контактные напряжения по формуле Г. Герца для начального касания упругих тел по линии. После этого рассчитываются величины износа профиля зуба за один цикл нагрузки в этих точках и определяются*

координаты точек изношенного профиля. Далее вычисляются новые значения скоростей скольжения, радиусов кривизны и контактных напряжений. После этого вычисляются значение износа на этом цикле, новые координаты точек изношенного профиля и т.д. Одновременно на каждом цикле вычисляют суммарный износ профиля звездочки в каждой точке и ищут максимальную величину износа. Таким образом, имеем итерационный процесс, который останавливается при достижении величины критического износа. И в конце определяется ресурс цепной передачи или гусеничного движителя по критерию предельного износа профиля звездочки. Созданная математическая модель является достаточно универсальной – она может быть применена для исследования цепных втулочных передач и гусеничного движителя с любым стандартным или нестандартным профилем зуба звездочки. Ее применение в процессе проектирования позволит создавать цепные передачи и гусеничные движители с повышенной износостойкостью.

*Ключевые слова:* цепная передача, математическая модель, звездочка, зуб, износ.

## **SYNTHESIS OF GEAR AND CHAIN DRIVE WITH EVOLUTE PROFILE AND HIS MODELING IN THE CAD-SYSTEMS**

Serhii Andrienko, Roman Protasov, Aleksandr Ustynenko

*The article considers to the problem solution by increasing the wear resistance of the sprockets tooth profiles for bushing-roller chain drives and for driving wheels of the tracked mover. A mathematical model of the wear process for the sprocket tooth profile has been developed. First, the coordinates of the points of the tooth profile are calculated. For standard drives, the profile is calculated using generally accepted methods. In the case of an evolute mesh, these coordinates are the result of a numerical solution for a second-order ordinary differential equation (ODE). This equation describes the profile of an evolute tooth. A profile is built in the  $x, y$  coordinate system. The center of the system coincides with the rotation center of the sprocket, and the  $y$  axis coincides with the tooth axis of symmetry. The profile is then approximated using third-order Bezier curves. Further, at the calculated points of the sprocket tooth profile, determinate the relative sliding speeds, curvature radii of the profile, contact stresses according to the Hertz formula for the initial tangency of elastic bodies along the line. After that, at these points, the values of the tooth profile wear are calculated for one load cycle. The coordinates of the points for the worn profile are determined. Next, new values of sliding velocities, curvature radii and contact stresses are calculated. After that, the value of wear on this cycle, new coordinates of points for the worn profile, etc. are calculated. Simultaneously, on each cycle, the total wear of the sprocket profile at each point is calculated and the maximum wear value is found. Thus, we have an*



*iterative process that stops when the critical wear value is reached. And at the end, the resource of the chain drive or tracked mover is determined by the criterion of limiting wear of the sprocket profile. The created mathematical model is quite versatile – it can be used to study bushing chain drives and a tracked mover with any standard or non-standard sprocket tooth profile. Its use in the design process will make it possible to create chain drives and tracked movers with increased wear resistance.*

*Key words: chain drive, mathematical model, sprocket, tooth, wear.*

### **References**

1. Kuznetsova, A.V. (2014) Increasing the resource of conical gears with bi convex-concave teeth by choosing rational hooking parameters. *Extended abstract of candidate's thesis*. Kharkiv [in Ukrainian].
2. Onishhenko, V.P., Kuznetsova, A.V. (2011) The effect of wear of bi convex-conical teeth on the hook parameters. *Mashinoznavstvo: Vseukraïns'kij shhomisjachnij naukovo-tehnichnij i virobnichij zhurnal*. L'viv, 11–12 (173–174), 15–20. [in Ukrainian].
3. Drozdov, Ju.N., Pavlov, V.G., Puchkov, V.N. (1986) *Friction and wear in extreme conditions*. Moscow: Mashinostroenie [in Russian].
4. Protasov, R.V., Ustinenko, A.V., Krotenko, G.A., Serikov, V.I. (2012) Study the rate of sliding of tooth profiles in epautary transmissions. *Visnik NTU "KhPI": Zb. nauk. prac'. Serija "Problemi mehanichnogo privodu"*. Kharkiv: NTU "KhPI", 36, 127–131 [in Russian].
5. Pavlov, A.I. (2005) *Contemporary theory of jagged hooks*. Kharkiv: KhNADU [in Russian].
6. Glushhenko, I.P. (1964) *The basics of chain chain design with sleeve-roller chains*. L'vov: Izd. L'vovskogo un-ta [in Russian].
7. Platonov, V.F., Leiashvili, G.R. (1986) *Tracked and wheeled transport-traction vehicles*. Moscow: Mashinostroenie [in Russian].
8. Andrienko, S.V., Ustinenko, A.V., Vorontsov, B.S. (2014) Numerical modeling of the profile of the tooth of a chain transmission asterisk. *Mekhanika ta mashinobuduvannja*, 1, 11–17 [in Russian].