УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ У ВИГЛЯДІ КВАТЕРНІОННИХ КРИВИХ

Аушева Н.М., д.т.н.
nataauscheva@gmail.com, ORCID 0000-0003-0816-2971
Гуменний А.А., аспірант
humennyi.arkadii@gmail.com, ORCID 0000-0001-7957-8646
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)

Сферичні криві мають суттєве значення для геометричного моделювання, комп'ютерних наук та для різних галузей інженерії, а визначення умов для їх побудови досліджено у багатьох роботах та налічує чималу кількість методів. Основна сфера застосування – комп'ютерна анімація та геометричне моделювання траєкторій руху у тривимірному просторі. Для моделювання таких кривих використовують одиничні кватерніони. Однак, ця тематика ще не вичерпана при використанні кватерніонів для побудови різних сплайнів, що зберігають свої властивості відповідно до існуючих у тривимірному просторі.

В роботі висвітлено досвід попередніх досліджень в області побудови сферичних кватерніонних кривих. Моделювання сферичних кривих вже досліджено для кривих Безьє та деяких інших інтерполяційних кривих на основі теорії кватерніонів. Автори роботи презентують побудову фундаментальних сплайнів (зокрема Катмалла-Рома та Коханека-Бартелса) із перевіркою їх властивостей після перенесення на поверхню сфери. Дані сплайни є важливими у моделюванні через їх властивість бути закільцованими, що дозволяє створити неперервний циклічний рух в анімації.

Автори проводять дослідження на основі методу представлення функції у кумулятивній формі. Для цього необхідним є попереднє представлення функції просторової кривої у вигляді суми додатків деяких базисних функцій на ключові точки. В якості приклада досліджується поведінка сферичних сплайнів при зміні параметрів натягу, зміщення та неперервності. У роботі показано, як отримані сферичні криві наслідують властивості їх тривимірних версій. Подальші дослідження пов'язані з застосуванням змодельованих кватерніонних кривих для побудови поверхонь.

Ключові слова: кватерніон, кумулятивна форма, сферична крива, фундаментальний сплайн, крива Катмалла-Рома, крива Коханека-Бартелса.

Постановка проблеми. Анімація об'єктів у тривимірному просторі задається за допомогою двох функцій – переміщення об'єкту у просторі та обертання об'єкту навколо свого центру. Для моделювання обертань доцільно використовувати функції сферичних кривих, які можна будувати за допомогою одиничних кватерніонів [1]. Зазвичай, функції, які використовуються в моделюванні, повинні бути параметричними. Для тривимірного простору існує великий клас параметричних інтерполяційних та апроксимаційних кривих, які використовуються при моделюванні складних геометричних об'єктів та траєкторій руху. Важливо мати сферичні криві з аналогічними властивостями. Спроби у перенесенні кривих Безьє на сферу представлені у багатьох роботах [2]. Авторами роботи [3] було запропоновано будувати сферичні криві за допомогою кватерніонної кумулятивної форми. В якості прикладу наведено побудову кривих Безье, В-сплайну та кривих Ерміта. Доцільно розширити клас кватерніонних кривих на фундаментальні сплайни.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [3] розглядається моделювання сферичної кватерніонної кривої за допомогою кумулятивної форми, перевагами якої є побудова функції в закритій формі, що легко диференціюється та задається програмно. В роботі Шоумейка [4] було запропоновано метод побудови кривих Безьє, на основі кватерніонів. Недоліком такого метода було те, що втрачалися властивості другої похідної. В статті [5] висвітлюється моделювання сім'ї кривих нульової довжини на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною. В цьому випадку кватерніони мають властивості комплексних чисел. Автори роботи [6] пропонують застосувати кумулятивну форму подання для моделювання кривих у дробово-раціональному вигляді. В цьому випадку змінюються властивості кривої. У роботі [7] будується відносна та абсолютна траєкторії руху частинки по сферичному сегменту, який обертається навколо вертикальної осі.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є застосування кватерніонного подання для фундаментальних сплайнів (зокрема у вигляді Катмалла-Рома та Коханека-Бартелса).

Основна частина. Для моделювання сферичних кривих застосуємо базисну форму [3]:

$$\mathrm{p}(u)=\sum_{i=0}^{n} B_i(u)\,\mathrm{p}_i,\ u\in[0,1], \tag{1}$$

де $B_i(u)$ – деяка базисна функція.

Для зручності перейдемо від форми (1) до подання на основі різниць між значеннями ключових точок:

$$p(u)=p_0\tilde{B}_{0,n}(u)+\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i\tilde{B}_{i,n}(u), \tag{2}$$

де $\tilde{B}_{i,n}(u)=\sum_{j=i}^{n}B_{j,n}(u)$ – кумулятивний базис, $\Delta p_i = p_i - p_{i-1}$.

Рівняння (2) дозволило перейти до кумулятивного подання кватерніонних кривих, які можна задати у базисній формі:

$$q(u) = q_0^{\tilde{B}_{0,n}} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\omega_i \tilde{B}_{i,n}(u)\right), \tag{3}$$

де $\omega_i = \log\left(q_{i-1}^{-1} q_i\right)$, q_i – одиничний кватерніон, в який переведено ключову точку p_i.

Будемо використовувати фундаментальний сплайн у вигляді [8]:

$$\begin{gathered} P(u) = P(0)\left(2u^3 - 3u^2 + 1\right) + P(1)\left(-2u^3 + 3u^2\right) + P'(0)\left(u^3 - 2u^2 + u\right) + \\ + P'(1)\left(u^3 - u^2\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Визначимо граничні умови фундаментального сплайна:

$$\begin{gathered} P(0) = p_k,\ P(1) = p_{k+1},\ P'(0) = \frac{1}{2}(1-t)\left(p_{k+1} - p_{k-1}\right), \\ P'(1) = \frac{1}{2}(1-t)\left(p_{k+2} - p_k\right), \end{gathered} \tag{5}$$

де $t \in [-1;1]$ – параметр натягу.

Для моделювання сферичної кривої застосуємо кумулятивну форму (3). Для цього спочатку представимо фундаментальний сплайн (4) за умови (5) у базисній формі:

$$\begin{gathered} B_0(u) = -su^3 + 2su^2 - su,\ B_1(u) = (2-s)u^3 + (s-3)u^2 + 1, \\ B_2(u) = (s-2)u^3 + (3-2s)u^2 + su,\ B_3(u) = su^3 - su^2,\ s = \frac{(1-\mathrm{t})}{2}, \end{gathered} \tag{6}$$

де $u \in [0;1]$.

Підставимо отримані базисні функції (6) до формули (3) і отримаємо кумулятивну форму задання сферичного фундаментального сплайна.

Приклад 1. Побудуємо замкнену криву на основі сферичного сплайну у фундаментального для точок: $(30°,100°)$, $(100°,100°)$, $(100°,30°)$, $(30°,30°)$, при $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$.

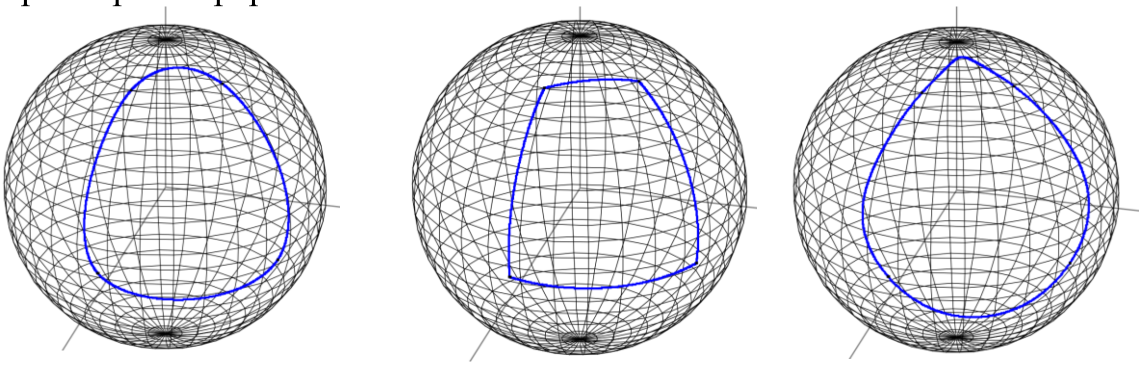
На рис. 1 відображено побудовану криву.

Зазначимо, що при умові $t = 1$ отримана лінія повторює результат сферичної інтерполяції для цих точок. Також бачимо, що властивість змінної натягу зберігається.

Тепер знайдемо сферичне кватерніонне відображення сплайна Коханека-Бартелса. Даний сплайн задається наступними граничними умовами:

$$\begin{gathered} P(0) = p_k,\ P(1) = p_{k+1}, \\ P'(0) = \frac{1}{2}(1-t)\left[(1+b)(1+c)\left(p_k - p_{k-1}\right) + (1-b)(1-c)\left(p_{k+1} - p_k\right)\right], \\ P'(1) = \frac{1}{2}(1-t)\left[(1+b)(1-c)\left(p_{k+1} - p_k\right) + (1-b)(1+c)\left(p_{k+2} - p_{k+1}\right)\right], \end{gathered} \tag{7}$$

де $t \in [-1;1]$ – параметр натягу, $b \in [-1;1]$ – параметр зміщення, $c \in [-1;1]$ – параметр неперервності.



а) б) в)

Рис. 1. Фундаментальний сплайн: а) $t = 0$ – сферичний сплайн Катмалла-Рома; б) $t = 1$; в) $t = -1$

Знайдемо базисні функції для кватерніонного подання на основі виразів (7):

$$B_0(u) = -a_1\left(u^3 - 2u^2 + u\right),$$

$$B_1(u) = \left(2u^3 - 3u^2 + 1\right) + \left(a_1 - a_2\right)\left(u^3 - 2u^2 + u\right) - a_3\left(u^3 - u^2\right),$$

$$B_2(u) = \left(-2u^3 + 3u^2\right) + a_2\left(u^3 - 2u^2 + u\right) + \left(a_3 - a_4\right)\left(u^3 - u^2\right),$$

$$B_3(u) = a_4\left(u^3 - u^2\right), \tag{8}$$

$$a_1 = \frac{(1-t)(1+b)(1+c)}{2}, a_2 = \frac{(1-t)(1-b)(1-c)}{2},$$

$$a_3 = \frac{(1-t)(1+b)(1-c)}{2}, \; a_4 = \frac{(1-t)(1-b)(1+c)}{2},$$

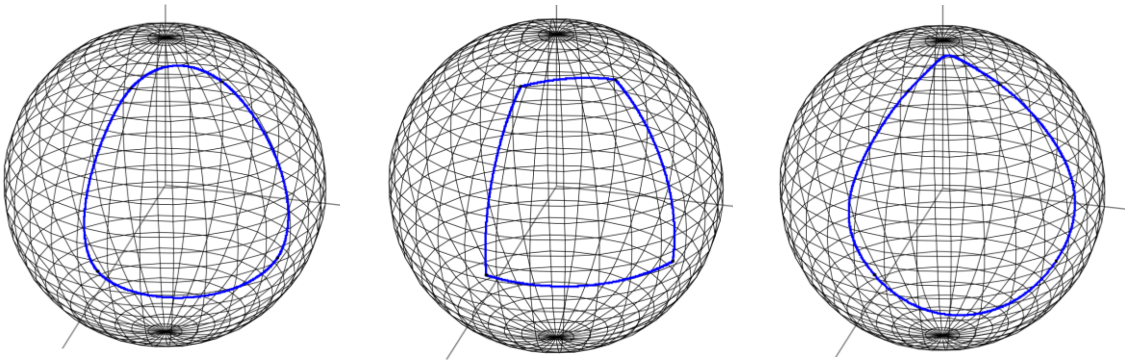
де $u \in [0;1]$.

Підставимо отримані базисні функції (8) до формули (3) і отримаємо кумулятивну форму задання сферичного сплайна Коханека-Бартелса.

Приклад 2. Перевіримо властивості параметра натягу для сплайна Коханека-Бартелса. Побудуємо замкнену криву на основі сферичного сплайну Коханека-Бартелса для точок з прикладу 1.

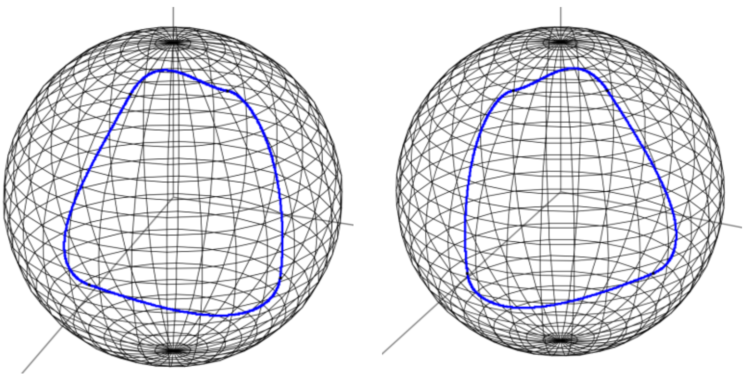
На рис. 2 відображено криві за умови $t = 0, t = 1, t = -1, b = 0, c = 0$. Зауважимо, що за умов $b = 0, c = 0$ сплайн Коханека-Бартелса співпадає із сплайном Катмалла-Рома.

На рис. 3 відображено криві за умови $t = 0, c = 0$ та $b = 1, b = -1$відповідно. З рисунку видно, що напрямок зміщення зберігається із оригінальним сплайном Коханека-Бартелса.



а) б) в)

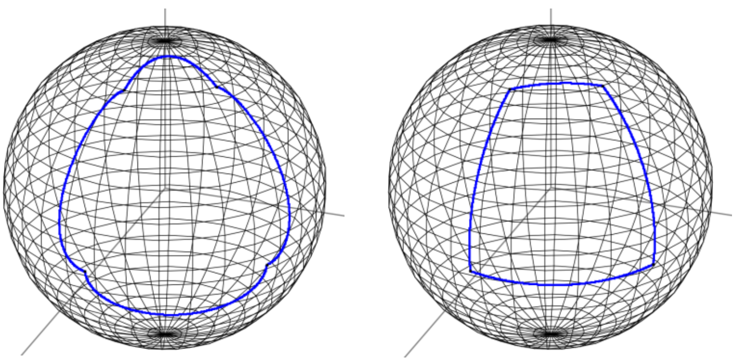
Рис. 2. Сплайн Коханека-Бартелса: а) $t = 0$ – сплайн Катмалла-Рома; б) $t = 1$; в) $t = -1$ при $b = 0$, $c = 0$



а) б)

Рис. 3. Сплайн Коханека-Бартелса: а) $b = 1$; б) $b = -1$ при $t = 0, c = 0$

На рис. 4 відображено криві за умови $t = 0, b = 0$ та $c = 1, c = -1$відповідно. З рисунку видно, що при $c < 0$ кути прямують до $90°$, а при $c > 0$ кути інвертуються. Можна побачити, що при $c = -1$ отримується результат аналогічний сферичній інтерполяції (аналогічно варіанту з $t = 1$).



а) б)

Рис. 4. Сплайн Коханека-Бартелса: а) $c = 1$; б) $c = -1$ при $t = 0, b = 0$

Висновки. Проведені дослідження показали, що для побудови фундаментальних сплайнів (Катмалла-Рома та Коханека-Бартелса) на сфері можна використовувати кватерніонне подання кумулятивної форми. Для коректного представлення у кватерніонній формі сплайн необхідно представити у базисному поданні.

Література

1. Dam E.B., Koch M., Lillholm M.. Quaternions, Interpolation and Animation. *Technical Report*. University of Copenhagen, 1998. 53 p.
2. Zube S. Quaternion rational Bézier curves. *Lietuvos matematikos rinkinys.* Vilnius University, 2011. 54 p.
3. Kim M.J., Kim M.S., Shin S.Y. A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives. *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 95)*, 1995. 372 p.
4. K. Shoemake. Animating rotation with quaternion curves. *Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH ’85)*, 1985, P. 245–254.
5. Аушева Н. М. Моделювання сім’ї ізотропних просторових кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною. *Сучасні проблеми моделювання.* Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2016. Вип. 7. С. 3-9.
6. Аушева Н.М., Гуменний А.А. Кватерніонні дробово-раціональні криві. *Комп’ютерне моделювання та оптимізація складних систем КМОСС-2020*: матеріали VI-ї Міжнар. наук.-техн. конф., 4-6 листоп. 2020. С.15-16. DOI: 10.32434/CMOCS-2020
7. Pylypaka S., Nesvidomin V., Volina T., Sirykh L., Ivashyna L. Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis. INMATEH – Agricultural Engineering (2020). Vol. 62, No. 3, pp. 79–86, DOI: 10.35633/inmateh-62-08.
8. Херн Д., Бейкер М.П. Компьютерная графика и стандарт OpenGL: пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1168 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ В ВИДЕ КВАТЕРНИОННЫХ КРИВЫХ

Аушева Н.М., Гуменный А.А.

Сферические кривые имеют существенное значение для геометрического моделирования, компьютерных наук и для различных отраслей инженерии, а определение условий для их построения исследовано во многих работах и насчитывает большое количество методов. Основная сфера применения – компьютерная анимация и геометрическое моделирование траекторий движения в трехмерном пространстве. Для моделирования таких кривых используют единичные кватернионы. Однако, эта тематика еще не исчерпана при использовании *кватернионов для построения различных сплайнов, сохраняющие свои свойства в соответствии с существующими в трехмерном пространстве.*

В работе освещен опыт предыдущих исследований в области построения сферических кватернионных кривых. Моделирование сферических кривых уже исследовано для кривых Безье, и некоторых других интерполяционных кривых на основе теории кватернионов. Авторы работы представляют построение фундаментальных сплайнов (в частности Катмалла-Рома и Коханека-Бартелса) с проверкой их свойств после переноса на поверхность сферы. Данные сплайны являются важными в моделировании из-за их свойства быть пригодными для зацикливания, что позволяет создать непрерывное циклическое движение в анимации.

Авторы проводят исследования на основе метода представления функции в кумулятивной форме. Для этого необходимо предварительное представление функции пространственной кривой в виде суммы произведений некоторых базисных функций на ключевые точки. В качестве примера исследуется поведение сферических сплайнов при изменении параметров натяжения, смещения и непрерывности. В работе показано, как полученные сферические кривые наследуют свойства их трехмерных версий.

Дальнейшие исследования связаны с применением смоделированных кватернионных кривых для построения поверхностей.

Ключевые слова: кватернион, кумулятивная форма, сферическая кривая, фундаментальный сплайн, кривая Катмалла-Рома, кривая Коханека-Бартелса.

MODELING OF FUNDAMENTAL SPLINES IN THE FORM OF QUATERNION CURVES

Natalia Ausheva, Arkady Humennyi

Spherical curves are essential for geometric modeling, computer science and for various branches of engineering, and the definition of conditions for their construction has been studied in many works and has a large number of methods. The main field of application is computer animation and geometric modeling of motion trajectories in three-dimensional space. To model such curves, unit quaternions are used. However, this topic is not yet exhausted when using quaternions to construct various splines that retain their properties in accordance with those existing in three-dimensional space.

The paper highlights the experience of previous research in the field of constructing spherical quaternion curves. Spherical curve modeling has already been explored for Bezier curves, and some other interpolation curves based on quaternion theory. The authors of the work present the construction of fundamental splines (in particular, Catmull-Rom and Kochanek-Bartels) with

verification of their properties after transferring to the surface of the sphere. These splines are important in modeling because of their property of being loopable, which allows to use them for continuous looping motion in animation.

The authors conduct research based on the method of representing functions in a cumulative form. This requires a preliminary representation of the spatial curve function as the sum of the products of some basis functions by key points. As an example, authors investigate the behavior of spherical splines when changing the parameters of tension, bias and continuity. The paper shows how the resulting spherical curves inherit the properties of their three-dimensional versions.

Further research is related to the application of simulated quaternion curves to construct surfaces.

Key words: isotropic curve, Bézier curve, Pythagorean-Hodograph curve.

References

1. Dam, E.B., Koch, M., Lillholm, M. (1983) *Quaternions, Interpolation and Animation.* Technical Report. University of Copenhagen, [in English].
2. Zube, S. (2011) *Quaternion rational Bézier curves. Lietuvos matematikos rinkinys.* Vilnius University [in English].
3. Kim, M. J., Kim, M.S., Shin, S.Y. (1995) A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives. *Computer Graphics* (Proceedings of SIGGRAPH 95) [in English].
4. Shoemake, K. (1985) Animating rotation with quaternion curves. *Computer Graphics* (Proc. of SIGGRAPH ’85), 245–254. [in English].
5. Ausheva, N.M. (2016) Modeling of a family of isotropic spatial curves based on quaterriones with a colliear vector part. *Suchasni problemy modelyuvannya*, 7, 3-9 [in Ukrainian].
6. Ausheva, N.M., Humennyi, A.A. (2020) Quaternion fractional-rational curves. Computer modeling and optimization of complex systems KMOSS-2020: Proceedings of the 5th International Scientific and Practical Conference, 4-6 november. 15-16. Retrieved from: DOI: 10.32434/ CMOCS-2020 [in Ukrainian].
7. Pylypaka, S., Nesvidomin, V., Volina, T., Sirykh, L., Ivashyna, L. (2020) Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis. INMATEH – Agricultural Engineering. 62, 3, 79–86. Retrieved from: 10.35633/inmateh-62-08. [in English].
8. Hern, D., Bejker, M.P. (2005) Computer graphs and OpenGL standard: M.: Izdatelskyj dom «Vylyams», [in Russian].