УДК 514.18

ГРАФО-АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ ЗНАХОДЖЕННЯ, ІЗ ЗАЗДАЛЕГІДЬ ВИЗНАЧЕНОЮ ТОЧНІСТЮ, ТОЧОК ПЕРЕГИНУ ДЛЯ ПЛОСКИХ СЕГМЕНТІВ ОДНОПАРАМЕТРИЧНИХ ТОЧКОВИХ ПОЛІНОМІВ

Павленко О.М., к.т.н.
alexander8944@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8646-2622
Лисенко К.Ю., аспірантка*
Lyksyushka24@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3047-6352
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

Надано у загальному вигляді рівняння однопараметричного точкового поліному. Яке визначається за геометричними параметрами вихідної плоскої дискретно поданої кривої.

Вказується, що графо-аналітичний спосіб знаходження точок перегину передбачає дискретизацію однопараметричного точкового поліному і її повторення зі зменшенням кроку і зі звуженням ділянки його сегменту, на якій знаходиться точка перегину.

Точка перегину знаходиться на ланці супровідної ламаної лінії, що побудована за результатами знаку у визначників. Визначники складаються для трійки точок супровідної ламаної лінії, які визначають її поряд розташовані три вершини.Формалізованою ознакою ланки супровідної ламаної лінії, на якій знаходиться точка перегину, є однакові рядки у суміжних визначниках з додатним та від'ємним значеннями.

Надається графічна інтерполяція, яка пояснює наявну відмінність знаків у суміжних визначниках, для ділянки супровідної ламаної лінії з точкою перегину.

Показано алгоритм знаходження перегину, із заздалегідь визначеною точністю, як зменшена ланка супровідної ламаної лінії, яка сприймається за точку перегину.

Наведено декілька прикладів знаходження ланок супровідної ламаної лінії з наявною точкою перегину в середині опуклої та увігнутої кривих однопараметричного точкового поліному, а також на її початкових і кінцевих ланках.

Для запропонованого способу знаходження точок перегину на континуальних кривих не потрібно здійснювати їх диференціювання, тобто алгоритм є універсальним. Це дозволяє створювати його програмні реалізації за єдиною методикою як для дискретних так і неперервних

* Науковий керівник – д.т.н., професор Верещага В.М.

кривих. Такий однаковий підхід дозволить скоротити витрати на створення програмних продуктів, зменшить видатки під час його експлуатації, що підвищить ефективність, створення з його використанням, геометричних моделей.

Ключові слова: плоска дискретно подана крива, однопараметричний точковий поліном, точка перегину.

Постановка проблеми. Наразі розроблені методи формування точкових поліномів, що континуально інтерполюють *n* попередньо визначених точок. Однак, ще не визначені властивості і можливості точкових поліномів. Дослідження вказаних питань є актуальною проблемою, її розв'язання буде сприяти створенню теорії точкових поліномів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Будь-яку криву можна достатньо точно подати у дискретній формі у вигляді сукупності точок [9, 15]. Однак, дискретне подання потребує створення великих баз даних і дискретні криві погано піддаються перетворенням. Аналітичні криві можуть описуватися або у координатній або у параметричній формі [4, 14]. Будь-яке аналітичне подання у координатній формі завжди є вісьозалежним [16] і тому його перетворення потребує відповідних перерахунків вихідних даних і констант і, при цьому, розв'язання задачі залежить від обрання вихідної систем координат.

Параметрична форма подання кривої передбачає, що будь-яка поточна точка на цій кривій визначається значенням параметрів і не залежить від обрання вихідної системи координат. Отже, параметричні криві є вісьонезалежними, що дозволяє легко здійснювати з ними афінні перетворення. Виходячи зі сказаного, у подальшому будемо аналізувати лише параметричні криві.

Параметричний кубічний сплайн [16], криві Безьє [17, 18, 21], криві Кунса [19, 20], B-сплайни [16], раціональні B-сплайни (*NURBS*) [16, 22] являють собою параметричні криві, що проходять лише через початкову і кінцеву точки кривої, яка моделюється, і не можуть проходити через проміжні точки. Їх застосування є ефективним для опису різних поверхонь технічного характеру, у яких задовільняються вимоги функціонального або естетичного призначення і які влаштовують потреби локальної інтерполяції. Однак, застосування згаданих параметричних кривих для моделювання складних багатофакторних станів і процесів є занадто ресурсовитратним через надмірне подрібнення сегментів моделей і через те, що вони побудовані на алгебраїчних методах.

Останнім часом, у Мелітопольській школі прикладної геометрії, розробляються композиційні методи геометричного моделювання [5, 6, 7, 8], що побудовані на застосуванні математично формалізованих способах геометричної інтерполяції, яка здатна здійснювати глобальну інтерполяцію дискретно поданих геометричних об'єктів, тобто інтерполювати одночасно кінцеві і проміжні базисні точки цього об'єкту [10, 11, 12, 13].

Інструментарієм для здійснення вказаної глобальної інтерполяції є гармонізовані і негармонізовані точкові поліноми.

Формулювання цілей статті. З метою аналізу плоских дискретних і континуальних кривих розробити універсальний алгоритм знаходження точок перегину із визначеною заздалегідь точністю.

Основна частина. Нехай у декартовій системі координат задано сегмент плоскої дискретно поданої кривої (ДПК) (рис. 1), однопараметричний точковий поліном (ОТП), що побудований на цій ДПК, матиме вигляд:

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} A_i p_i \text{ , для } i = \overline{1,n}; \qquad (1)$$

де A_i – вихідні точки плоскої ДПК;

p_i – координати Балюби-Найдиша (БН-координати).

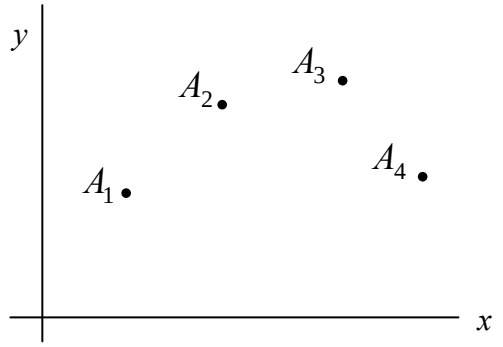

Рис. 1. Вихідна ДПК.

ОТП є континуальною кривою, тому що усі його БН-координати являють собою дробові раціональні функції, які на вказаному сегменті є континуальними, тому що вихідна ДПК не передбачає особливих точок (розриву, звороту).

Традиційний спосіб знаходження точок перегину [1] передбачає відшукування екстремумів на похідній ОТП (1).

У цій статті пропонується графо-аналітичний спосіб знаходження точок перегину на ОТП (1), який полягає у наступному.

1) Обирається крок зміни параметру та визначаються точки на кривій (1) для побудови її графіка, тобто ОТП дискретизується.

2) Визначаються ланки с λ загущеної ДПК, у межах якої буде знаходитись точка перегину.

3) Знаходиться, із заздалегідь визначеною точністю, шукана точка перегину.

Розглянемо більш детально кожен із цих пунктів.

1) Після обрання кроку зміни параметру, розраховуються значення ОТП для усіх параметрів, у відповідності з обраним кроком.

Таким чином, континуальний ОТП (1) дискретизується, тобто представляється у вигляді згущеної ДПК. Результат дискретизації запишемо у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

I	1	2	3	4	5	…	n–2	n–1	n
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	…	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	…	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

2) Для визначення ланок супровідної лінії (СЛ) згущеної ДПК, у межах яких будуть знаходитись шукані точки перегину, будемо розглядати поспіль усі ділянки, що складаються із трьох точок, починаючи з самої першої для $i=1$, тобто $i=1;\ i+1=2;\ i+2=3$ і до останньої, тобто $i=n-2;\ i+1=n-1;\ i+2=n$.

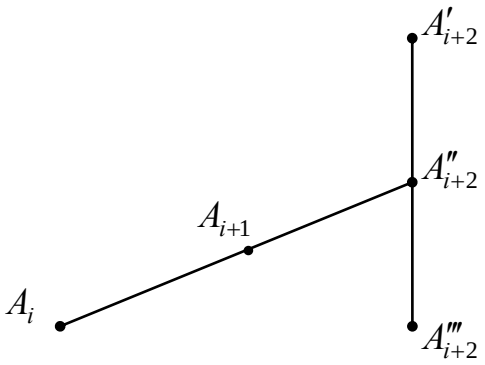

Рис. 2. Варіанти розташування точки $i+2$.

Перші дві точки i та $i+1$ утворюють пряму, відносно якої будемо визначати положення третьої точки $i+2$. Варіантів розташування точки $i+2$, відносно прямої i, $i+1$, може бути три (рис. 2). Для першого випадку, коли точка A'_{i+2} знаходиться над прямою A_iA_{i+1} значення визначника (2) буде додатним.

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1\\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1\\ x'_{i+2} & y'_{i+2} & 1\end{vmatrix}>0$$

Для другого випадку, коли A''_{i+2} знаходиться на прямій A_iA_{i+1}, значення визначника (3) буде дорівнювати нулю.

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1\\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1\\ x''_{i+2} & y''_{i+2} & 1\end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

Для третього випадку, коли A'''_{i+2} знаходиться нижче прямої A_iA_{i+1}, значення визначника (4) буде від'ємним.

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1\\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1\\ x'''_{i+2} & y'''_{i+2} & 1\end{vmatrix}<0 \qquad (4)$$

Варіант (3) лишаємо без уваги. Варіанти (2) або (4) запам'ятовуємо.

Зрушуємося на один крок вправо, тобто дорівнюємо $i=i+1$ в результаті $i=2$; тоді $i+1=2+1=3,\ i+2=2+2=4$. У разі, коли $i\le n-2$ розглядаємо трійку точок $A_2,\ A_3,\ A_4$ обчисливши визначник:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_4 & y_4 & 1\end{vmatrix} \qquad (5)$$

У разі, коли $i<n-2$, процес припиняється.

Якщо знак визначника (5) не змінюється по відношенню до знаку визначника для попередньої трійки точок, то процес продовжується, тобто $i=i+1$ та цикл продовжується.

У разі, коли знак визначника (5) змінився по відношенню до знаку визначника для попередньої трійки точок, то визначається ланка СЛ для згущеної ДПК, на якій знаходиться точка перегину. Розглянемо процес визначення цієї ланки.

Нехай визначник для попередньої трійки точок:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix} > 0, \qquad (6)$$

а визначник для наступної трійки точок:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \\ x_{i+3} & y_{i+3} & 1 \end{vmatrix} < 0 \qquad (7)$$

Графічну інтерпретацію такої ситуації, що відповідає знакам визначників (6) та (7), зобразимо на рис. 3. Точка $(i+2)$ знаходиться вище прямої $(i)(i+1)$, тому визначник (6) є додатним, а ділянка ОТП (штрихова лінія) між точками (i) та $(i+1)$ знаходиться нижче відтинку $(i, i+1)$.

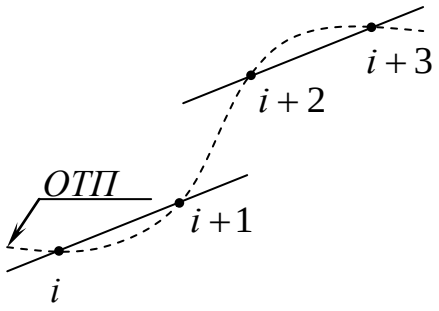

Рис. 3. Геометрична схема, що відповідає (6) та (7).

Точка $(i+1)$ знаходиться нижче прямої $(i+2)(i+3)$, тому визначник (7) є від'ємним, а ділянка ОТП між точками $(i+2)$ та $(i+3)$ знаходиться вище відтинку $(i+2, i+3)$. Саме на відтинку $(i+1, i+2)$ відбувається зміна позиціонування ОТП відносно ланок СЛ згущеної ДПК. Зміна позиціонування відбувається у точці перегину, тобто на відтинку $(i+1, i+2)$.

Програмно реалізувати геометричну схему (рис. 3) можна наступним чином:

– у визначнику (6) задіяні точки (i), $(i+1)$ та $(i+2)$;
– у визначнику (7) задіяні точки $(i+1)$, $(i+2)$ та $(i+3)$.

Як бачимо, точки $(i+1)$ та $(i+2)$ використовуються і у визначнику (6), і у визначнику (7).

Таким чином, точки, що двічі застосовувались і визначають ділянку на якій знаходиться точка перегину.

Нехай значення ε заздалегідь визначає необхідну точність знаходження положення точки перегину.

Визначимо довжину ланки $l_{i+1,i+2}$:

$$l_{i+1,i+2} = \sqrt{\Sigma_{i+2,i+2}^{i+1}} = \sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2} \qquad (8)$$

Якщо $\left|l_{i+1,i+2}-\varepsilon\right|\le 0$, то процес зупиняється, точку перегину знайдено.

Якщо $\left|l_{i+1,i+2}-\varepsilon\right|>0$, то зменшується крок і після цього, знову розраховуються на відрізку $(i+1,i+2)$ значення ОТП для усіх параметрів, у відповідності зі зміненим кроком. Результат дискретизації континуального ОТП заноситься у табл. 2 і процес повторюється (табл. 2 аналогічна табл. 1).

Після виявлення відтинку $(i+1,i+2)$ для зменшеного кроку, застосовується перевірка, аналогічна (8). Після перевірки процес або продовжується, або припиняється.

Розглянемо приклад для ДПК, вихідні дані якої наведені у таблиці 3:

Таблиця 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	1	2	4	7	10	14	17	19	21	23	27	29
У	-4	-2	0	2	3	4	3	1	0	0	1	3

Приклад 1.

1) Приймемо $i=1$, тоді $i+1=2$; $i+2=3$; складемо визначник

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2<0$$ – точка 3 знаходиться під прямою 12 (один, два).

2) Приймемо $i=i+1$, тобто $i=2$. Тоді $i+1=3$; $i+2=4$.

2.1. Перевіряємо, якщо $i<n$, переходимо до 2.2.; якщо $i\ge n$, процес зупиняється.

2.2. Перевіряємо, якщо $i+1<n$, переходимо до 2.3.; якщо $i+1\ge n$, переходимо до пункту 2.1.

2.3. Перевіряємо, якщо $i+2<n$, продовжуємо розрахунки – п. 3; якщо $i+2\ge n$, виконуємо п.п. 2.1., 2.2.; якщо $n+2=n$, переходимо до пункту 4.

3. Складемо та обчислюємо визначник

$$\begin{vmatrix}x_i & y_i & 1\\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1\\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1\end{vmatrix}$$

$$i=2\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ 7 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2<0$$ – точка 4 – під прямою 23 (два, три).

Повертаємось до п. 2 та продовжуємо:

$$i=3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$$ – точка 5 – під прямою 34 (три, чотири).

$$i=4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 14 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$ – точка 6 – під прямою 45 (чотири, п’ять).

$$i=5 \Rightarrow \begin{vmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 14 & 4 & 1 \\ 17 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 < 0$$ – точка 7 – під прямою 56 (п’ять, шість).

$$i=6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 14 & 4 & 1 \\ 17 & 3 & 1 \\ 19 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0$$ – точка 8 – під прямою 67 (шість, сім).

$$i=7 \Rightarrow \begin{vmatrix} 17 & 3 & 1 \\ 19 & 1 & 1 \\ 21 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$ – точка 9 – над прямою 78 (сім, вісім).

$$i=8 \Rightarrow \begin{vmatrix} 19 & 1 & 1 \\ 21 & 0 & 1 \\ 23 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$ – точка $\underline{10}$ – над прямою 89 (вісім, дев’ять).

Тут і далі, номер точки, що складається з двох цифр, знизу підкреслюється.

$$i=9 \Rightarrow \begin{vmatrix} 21 & 0 & 1 \\ 23 & 0 & 1 \\ 27 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$ – точка $\underline{11}$ – над прямою 9 $\underline{10}$.

$$i=10 \Rightarrow \begin{vmatrix} 23 & 0 & 1 \\ 27 & 1 & 1 \\ 29 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0$$ – точка $\underline{12}$ – над прямою $\underline{10}$ $\underline{11}$.

Як бачимо, для $i=6$ визначник $\Delta_6 < 0$, а для $i=7$ визначник $\Delta_7 > 0$. Виникає питання, на якій з ділянок (67, читається: шість, сім), (78, читається: сім, вісім), (89, читається: сім, вісім) буде наявною точка перегину? Чому розглядаються саме ці ділянки? Тому, що у формуванні визначників Δ_6 та Δ_7 приймають участь саме точки 6, 7, 8, 9.

Запишемо ще раз визначники Δ_6 та Δ_7:

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 14 & 4 & 1 \leftarrow \textit{координати 6 - ї точки} \\ 17 & 3 & 1 \leftarrow \textit{координати 7 - ї точки} \\ 19 & 1 & 1 \leftarrow \textit{координати 8 - ї точки} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 17 & 3 & 1 \\ 19 & 1 & 1 \\ 21 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow координати\,7\text{-}ї\ точки \\ \leftarrow координати\,8\text{-}ї\ точки \\ \leftarrow координати\,9\text{-}ї\ точки \end{matrix}.$$

У цих визначниках координати точок 6 та 9 використовуються одночасно по одному разу, а координати точок 7 та 8 – двічі. Отже точки 6 та 9 – лишаємо без уваги, а розглядаємо тільки ланку (78, читається: сім, вісім) СЛ ДПК, на якій і буде знаходитись точка перегину ДПК, для цього виконуємо пункту 4.

4. Визначаємо довжину l_{78} ланки (78):

$$l_{78} = \sqrt{\Sigma_{8,8}^{7}} = \sqrt{(x_8 - x_7)^2 + (y_8 - y_7)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} \approx 2{,}83$$

5. Визначається різниця $|l_{78} - \varepsilon| = |2.87 - \varepsilon|$. Якщо різниця $|2.87 - \varepsilon| \le 0$, то процес визначення точки перегину зупиняється. Якщо $|2.87 - \varepsilon| > 0$, то шляхом дискретизації ОТП на ділянці у межах відрізку (78) зменшується крок і цей алгоритм повторюється, починаючи з пункту 1.

Приклад 2.

Розглянемо приклад 2, вихідні дані для ДПК якої наведено у таблиці 4.

Таблиця 4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	2	3	5	7	9	11	13	15	16	17
y	4	1	-1	-1	0	2	3	1	-1	-4

$$i = 1 \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4;\ i = 2 \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8;$$

$$i = 3 \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ i = 4 \Rightarrow \Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$i = 5 \Rightarrow \Delta_5 = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ i = 6 \Rightarrow \Delta_6 = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$i = 7 \Rightarrow \Delta_7 = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \\ 16 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ i = 8 \Rightarrow \Delta_8 = \begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 16 & -1 & 1 \\ 17 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Між точками 4 та 5 змінюється знак визначників Δ_4 та Δ_5. Δ_4 є додатним, а Δ_5 – від'ємним. Запишемо їх ще раз:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow координати\, 4\text{-}ї\ точки \\ \leftarrow координати\, 5\text{-}ї\ точки \\ \leftarrow координати\, 6\text{-}ї\ точки \end{matrix};$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow координати\, 5\text{-}ї\ точки \\ \leftarrow координати\, 6\text{-}ї\ точки \\ \leftarrow координати\, 7\text{-}ї\ точки \end{matrix}.$$

Отже, четверту і сьому точки лишаємо без уваги, тому що їх координати використовувались один раз. Таким чином, точка перегину, за фактичними умовами ДПК, знаходиться між п'ятою та шостою точками, тому що їх координати, у Δ_4 та Δ_5, використані двічі.

Приклади 1 та 2 були наведені для випадку, коли точка перегину знаходиться всередині сегменту ДПК. Розглянемо приклад 3 для випадків, коли точка перегину знаходиться на початку та в кінці, відповідно, сегменту ДПК.

Приклад 3. У цьому прикладі точки перегину знаходяться на початку та в кінці сегменту ДПК.

Вихідні дані наведемо у таблиці 5:

Таблиця 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	2	4	5	7	9	12	15	16	19
y	4	2	0	-2	-3	-3	-1	2	7

$$i=1 \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ i=2 \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Точка перегину знаходиться між 2-ю та 3-ю точками, тому що координати другої та третьої точок одночасно є наявними у Δ_1 та Δ_2

$$i=3 \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ i=4 \Rightarrow \Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 12 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$i=5 \Rightarrow \Delta_5 = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 12 & -3 & 1 \\ 15 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6;\ i=6 \Rightarrow \Delta_6 = \begin{vmatrix} 12 & -3 & 1 \\ 15 & -1 & 1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$i=7 \Rightarrow \Delta_7 = \begin{vmatrix} 15 & -1 & 1 \\ 16 & 2 & 1 \\ 19 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Як бачимо, $\Delta_6 > 0;\ \Delta_7 < 0$, у яких одночасно використовуються координати сьомої та восьмої точок. Отже, точка перегину знаходиться між сьомою та восьмою точками.

Висновки. Запропонований у даному дослідженні алгебраїчно формалізований алгоритм знаходження точок перегину плоскій кривій може бути застосований як для дискретно поданих так і для дискретно представлених кривих. Що є важливим для аналізу як вихідних геометричних даних так і результатів інтерполяції, тобто континуальних кривих. Для запропонованого способу знаходження точок перегину на континуальних кривих не потрібно здійснювати їх диференціювання, тобто алгоритм є універсальним. Це дозволяє створювати його програмні реалізації за єдиною методикою як для дискретних так і неперервних кривих. Такий однаковий підхід дозволить скоротити витрати на створення програмних продуктів, зменшить видатки під час його експлуатації, що підвищить ефективність, створення з його використанням, геометричних моделей.

Література

1. Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Спосіб визначення опуклості ДПК. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2017. Вип.8. С. 44-48.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении : дис. … д-ра тех. наук. Макеевка: МИСИ, 1995. 227 с.
3. Балюба И.Г., Найдыш В.М. Точечное исчисление [учебное пособие], под ред. Верещаги В.М. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015. 234 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. инд. перераб. М.: Наука, 1980, 996 с.
5. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Моногафія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108 с.
6. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем : дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
7. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О., Лисенко К.Ю. Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
8. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. Метод композиційного геометричного моделювання. Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 310 с.
9. Верещага В.М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь: дис. ... док-ра. техн. наук. КДТУБА. К, 1996, 320 с.
10. Верещага В.М., Лисенко К.Ю., Найдиш А.В. Параметризація багатовимірних геометричних об’єктів методами точкового числення Балюби-Найдиша. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.15. С. 51-57.
11. Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М. Особливості

композиційного геометричного моделювання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Технічні науки.* К., 2019. Вип. 95. С.131-136.
12. Лисенко К.Ю., Верещага В.М., Найдиш А.В. Балюби-Найдиша інтерполяція чотирьох точок у площині. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вып.13. С. 100-105.
13. Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Верещага В.М., Балюба І.Г. Композиційна інтерполяція плоскої дискретно поданої кривої. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.14. С. 113-121.
14. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н., Михальов О.І., Усов А.В. Моделювання та оптимізація систем: підручник. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс», 2017. 804 с.
15. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція. Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. 250 с.
16. Роджерс Д. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.
17. Bézier, P., "How Renault Uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling," SAE Technical Paper 680010, 1968.
18. Bézier, P. E., William Rede Hawthorne and George Robert Edwards 1997Example of an existing system in the motor industry: the Unisurf systemProc. R. Soc. Lond. A321207–218.
19. FORREST, A.R. The twisted cubic curve: A computer-aided geometric design approach. Comput. Aided Des. 12, 4 (July 1980), 165-172.
20. Forrest, A.R. Curves and Surfaces for Computer Aided Design Cambridge Computer-Aided Design Group Thesis, July 1968.
21. Piegl, L. A geometric investigation of the rational Bézier scheme in computer aided geometric design. Computers in Industry, 7:401–410, 1987.
22. Versprille, K.J., “Computer-Aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form,” Ph.D. dissertation, Syracuse Univ., 1975.

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЕ, С ЗАРАНЕЕ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ТОЧНОСТЬЮ, ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ДЛЯ ПЛОСКИХ СЕГМЕНТОВ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПОЛИНОМА

Павленко О.М., Лисенко К.Ю.

Предоставлено в общем виде уравнения однопараметрического точечного полинома, которое определяется по геометрическим параметрам исходной плоской дискретно представленной кривой.

Указывается, что графо-аналитический способ нахождения точек перегиба предусматривает дискретизацию однопараметрического точечного полинома и его повторения с уменьшением шага и с сужением участка его сегмента, на котором находится точка перегиба.

Точка перегиба находится на звене сопроводительной ломаной линии, построенной по результатам знака у определителей. Определители состоят для тройки точек сопроводительной ломаной линии, которые определяют ее рядом расположенные три вершины.

Формализованным признаком звена сопроводительной ломаной линии, на которой находится точка перегиба, является наличие одинаковых строк в смежных определителях с положительными и отрицательными значениями.

Предоставляется графическая интерполяция, которая объясняет имеющееся отличие знаков в смежных определителях, для участка сопроводительной ломаной линии с точкой перегиба.

Показано алгоритм нахождения перегиба, с заранее определенной точностью, как уменьшенное звено сопроводительной ломаной линии, воспринимается точки перегиба.

Приведено несколько примеров нахождения звеньев сопроводительной ломаной линии с имеющейся точкой перегиба в середине выпуклой и вогнутой кривых однопараметрического точечного полинома, а также на ее начальных и конечных звеньях.

Для предложенного способа нахождения точек перегиба на континуальных кривых не нужно осуществлять их дифференцирование, то есть алгоритм является универсальным. Это позволяет создавать его программные реализации по единой методике как для дискретных так и непрерывных кривых. Такой одинаковый подход позволит сократить затраты на создание программных продуктов, уменьшит расходы при его эксплуатации, повысит эффективность, создание с его использованием, геометрических моделей.

Ключевые слова. Плоская дискретно представлена кривая, однопараметрическим точечный полином, точка перегиба.

GRAPHIC-ANALYTICAL METHOD FOR LOCATING WITH A PRELIMINARY DEFINED ACCURACY OF INFLECTION POINTS FOR FLAT SEGMENTS OF A SINGLE-PARAMETRIC POINT POLYNOMA

Oleksandr Pavlenko, Kseniia Lysenko

The general form of the equation of a one-parameter point polynomial, which is determined by the geometric parameters of the original plane discretely represented curve.

It is indicated that the graphical-analytical method for finding inflection points provides for discretization of a one-parameter point polynomial and its repetition with decreasing step and narrowing the section of its segment on which the inflection point is located.

The inflection point is located on the link of the accompanying broken line, built according to the results of the sign of the determinants. Determinants consist of three points of the accompanying polyline, which define its adjacent three vertices.

A formalized feature of the link of the accompanying broken line, on which the inflection point is located, is the presence of identical lines in adjacent determinants with positive and negative values.

Graphical interpolation is provided, which explains the existing difference in signs in adjacent identifiers, for a section of an accompanying polyline with an inflection point.

An algorithm for finding the inflection is shown, with a predetermined accuracy, the inflection points are perceived as a reduced link of the accompanying broken line.

Several examples of finding the links of an accompanying broken line with an existing inflection point in the middle of the convex and concave curves of a one-parameter point polynomial, as well as on its initial and final links are given.

For the proposed method of finding the inflection points on the continuous curves do not need to differentiate them, ie the algorithm is universal. This allows you to create its software implementations by a single method for both discrete and continuous curves. This same approach will reduce the cost of creating software products, reduce costs during its operation, which will increase efficiency, creating with its use, geometric models.

Keywords. A flat curve is discretely represented by a one-parameter point polynomial, an inflection point.

References

1. Vereshchaga, V., Lysenko, K. (2017) Method for determining the convexity of DGC. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 8, 44-48. [in Ukrainian].
2. Balyuba, I. (1995) Pointwise constructive geometry of manifolds: Doctor's thesis. Makeevka: MISI. [in Russian].
3. Balyuba, I., Naydysh, V. (2015) Point calculus [tutorial], ed. Vereshchaga V. Melitopol: Bogdan Khmelnitsky Melitopol State Pedagogical University. [in Russian].
4. Bronshtejn, I., Semendyaev, K. (1980) A guide to mathematics for engineers and college students. M.: The science. [in Russian].
5. Vereshchaga, V. (2017) Composite geometric modeling: Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V. [in Ukrainian].
6. Adoniev, Ye. (2018) Compositional method of geometric modeling of multifactor systems: Doctor's thesis. K .: KNUBA. [in Ukrainian].
7. Vereshchaga, V., Naydysh, A., Adoniev, Ye., Lysenko, K. (2019) Fundamentals of compositional geometric modeling: a textbook. Melitopol: FOP Odnorog T.V. [in Ukrainian].

8. Vereshchaga, V., Naydysh, A., Adoniev, Ye. (2019) Method of compositional geometric modeling. Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V. [in Ukrainian].
9. Vereshchaga, V. (1996) Discrete-parametric method of geometric modeling of curved lines and surfaces: Doctor's thesis. K: KDTUBA [in Ukrainian].
10. Vereshchaga, V., Naydysh, A., Lysenko, K. (2019) Parameterization of multidimensional geometric objects by the methods of point calculus Balyuba-Naidysha. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 15, 51-57 [in Ukrainian].
11. Lysenko, K., Naydysh, A., Balyuba, I., Vereshchaga, V. (2019) Features of compositional geometric modeling. *Applied geometry and engineering graphics.* K., 95, 131-136 [in Ukrainian].
12. Lysenko, K., Naydysh, A., Vereshchaga, V. (2019) Balyuba-Naydysha interpolation four points in the plane. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 13, 100-105 [in Ukrainian].
13. Lysenko, K., Naydysh, A., Balyuba, I., Vereshchaga, V. (2019) Composite interpolation of a flat discretely represented curve. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 14, 113-121 [in Ukrainian].
14. Dubovoy, V., Kvetny, R., Mikhalev, O., Usov, A. (2017) Modeling and optimization of systems: a textbook. Vinnytsia: PE "Edelweiss" [in Ukrainian].
15. Naydysh, V. (2007) Discrete interpolation. Melitopol: VDP "Lux" [in Ukrainian].
16. Rogers, D. (2001) Mathematical foundations of computer graphics. M.: Mir. [in Russian].
17. Bézier, P., (1968) "How Renault Uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling," SAE Technical Paper 680010 [in English].
18. Bézier, P. E., William Rede Hawthorne and George Robert Edwards 1997Example of an existing system in the motor industry: the Unisurf systemProc. R. Soc. Lond. A321. 207–218 [in English].
19. FORREST, A.R. (1980) The twisted cubic curve: A computer-aided geometric design approach. Comput. Aided Des. 12, 4 (July 1980), 165-172 [in English].
20. Forrest, A.R. (1986) Curves and Surfaces for Computer Aided Design Cambridge Computer-Aided Design Group Thesis, July 1968 [in English].
21. Piegl, L. (1987) A geometric investigation of the rational Bézier scheme in computer aided geometric design. Computers in Industry, 7:401–410, [in English].
22. Versprille, K.J., (1975) "Computer-Aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form," Ph.D. dissertation, Syracuse Univ., [in English].